TEXTOS FUNDAMENTAIS DA FÍSICA MODERNA

VOLUME I

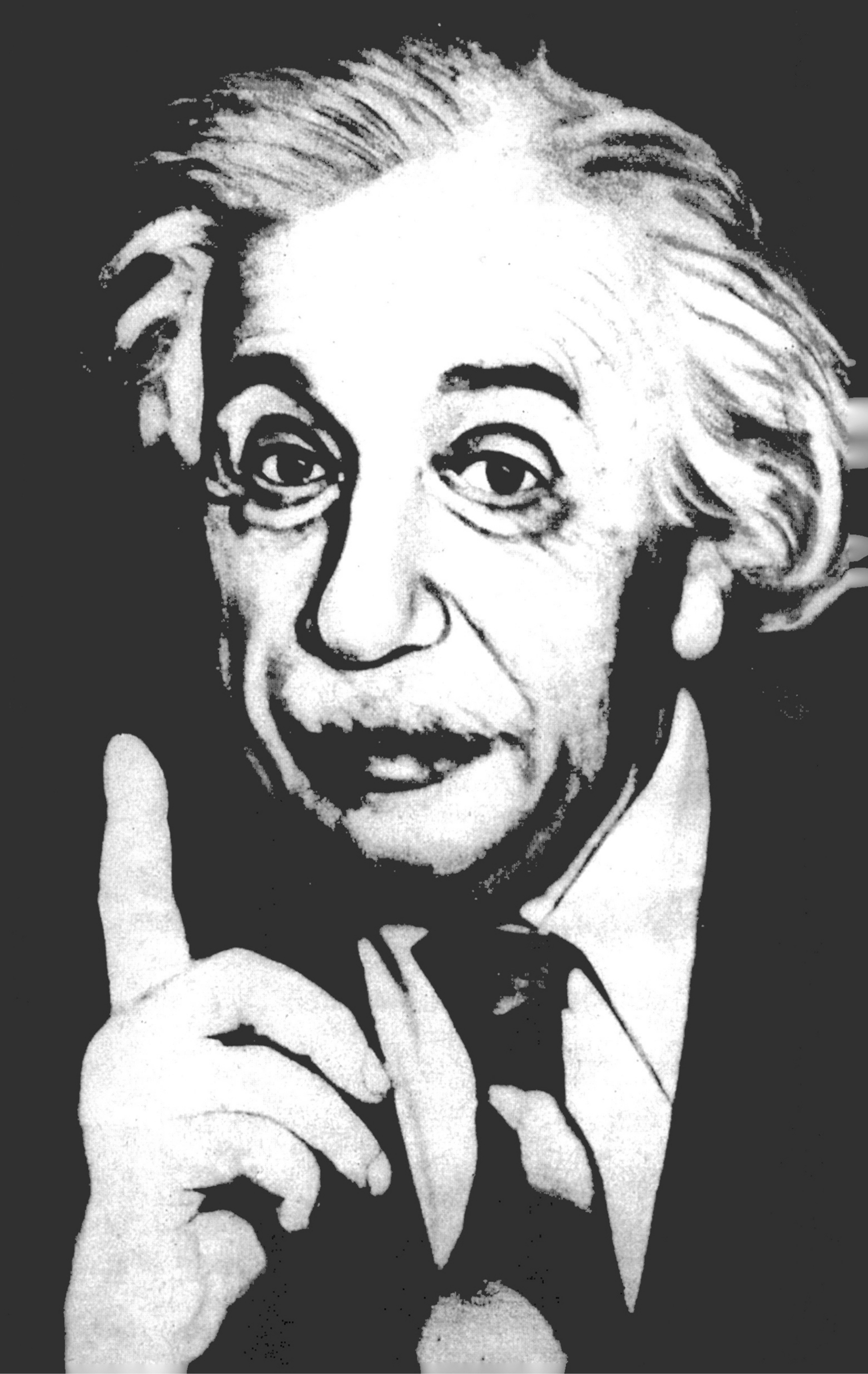
O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

H. A. LORENTZ
A. EINSTEIN e H. MINKOWSKI

6.ª Edição

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

ISBN 978-972-31-0723-4



https://gulbenkian.pt/publications/textos-fundamentais-da-fisica-moderna-i/

TEXTOS FUNDAMENTAIS DA FÍSICA MODERNA

VOLUME I

O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE

6.ª edição

H. A. LORENTZ
A. EINSTEIN e H. MINKOWSKI

Colectânea de artigos
com um ensaio de H. Weyl,
notas de A. Sommerfeld
e prefácio de O. Blumenthal

Prefácio de
Manuel dos Reis

Tradução de
Mário José Saraiva

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Tradução do original alemão
DAS RELATIVITÄTSPRINZIP
de H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski,
conforme a 6.ª edição de
B. G. Teubner
Stuttgart, 1958

Edição da
Fundação Calouste Gulbenkian
Av. de Berna | Lisboa
ISBN 978-972-31-0723-4

PREFÁCIO À EDIÇÃO PORTUGUESA

O Serviço de Educação da Fundação Calouste Gulbenkian decidiu incluir no seu Plano de Edições uma tradução portuguesa da colecção de trabalhos originais sobre a teoria da relatividade, ou com ela estreitamente relacionados, publicada por Otto Blumenthal em Leipzig sob o título Das Relativitätsprinzip *e constituída primeiro por trabalhos de H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski estranhos à ideia da relatividade geral, depois, a partir da 3.ª edição (1919), aumentada com trabalhos de Einstein sobre a gravitação e finalmente, a partir da 4.ª edição (1921), acrescentada também com o trabalho de H. Weyl que nela figura em último lugar. A presente tradução, confiada à reconhecida competência do Sr. Eng. Mário José Saraiva, é feita sobre a 5.ª edição (1923), idêntica à precedente.*

É digna do maior louvor esta iniciativa. Se bem que hoje sejam fàcilmente acessíveis, em diversas línguas, bons tratados sobre a teoria da relatividade, é sempre altamente instrutivo o estudo dos principais trabalhos originais; acresce que mesmo bons tratados têm por vezes uma ou outra omissão, alteração ou adição menos conveniente, que a leitura dos trabalhos originais permite corrigir.

O livro contém onze trabalhos, insertos por ordem cronológica, que se repartem e caracterizam brevemente do seguinte modo: dois trabalhos de Lorentz, um sobre a experiência interferencial de Michelson e outro sobre fenómenos electromagnéticos num sistema em movimento, anteriores à fundação daquela teoria; o trabalho sobre o mesmo assunto, mas concebido num espírito muito diferente, com que Einstein *fundou a teoria da relatividade especial, e outro, também de Einstein, em que dessa teoria se extrai como consequência a descoberta da inércia da energia; o trabalho sobre o espaço e o tempo, em que Minkowski explana a descoberta, apresentada mais brevemente num trabalho um pouco anterior, de que o espaço e o tempo não são independentes, mas se unem num contínuo quadridimensional de métrica pseudo--euclidiana, descoberta sem a qual a teoria da relatividade geral não poderia desenvolver-se; o trabalho sobre a influência da gravidade na propagação da luz, em que Einstein desenvolve, melhor do que tinha feito num trabalho anterior, mas ainda dum ponto de vista elementar e de primeira aproximação, a formulação do princípio da equivalência, que viria a ser a base da teoria da relatividade geral e de que extrai consequências de grande importância sobre o modo como certos fenómenos físicos são influenciados pela gravitação; o trabalho sobre os fundamentos da teoria da relatividade geral, em que Einstein compendiou e sistematizou os trabalhos com que nos últimos anos precedentes tinha fundado esta teoria, e outro também de Einstein sobre o princípio de Hamilton aplicado à teoria, que contém um aperfeiçoamento sobre esta questão, tratada anteriormente por Hilbert e por Lorentz; dois trabalhos de Einstein, um sobre a aplicação da teoria da relatividade geral à cosmologia e outro sobre o papel que possìvelmente desempenharia a gravitação na constituição das partículas elementares da matéria então conhecidas, no primeiro dos quais se adopta uma equação tensorial mais geral para o campo da gravitação a fim de se obter um mundo espacial estático finito com matéria uniformemente distribuída, e no segundo, mantendo essa equação mais geral, se postula uma forma especial dela dentro das cargas eléctricas para se explicar a estabilidade do electrão; finalmente o trabalho de Weyl sobre gravitação e electricidade, que contém a primeira teoria unificada dos campos gravitacional e electromagnético, obtida por meio duma generalização da geometria riemanniana em que, além da não integrabilidade da direcção, se admite também a não integrabilidade do comprimento.*

Destes onze trabalhos têm ainda actualidade: os dois trabalhos de Einstein sobre a teoria da relatividade especial, não obstante o desenvolvimento de que ela foi objecto posteriormente e o aperfeiçoamento formal e metodológico conseguido utilizando o espaço-tempo referido a coordenadas galileanas e o cálculo tensorial respectivo; o trabalho de Minkowski, salvo as linhas referentes à gravitação onde o autor propõe a substituição da lei de Newton por outra análoga mas invariante perante a transformação de Lorentz e que coincide com uma das que Poincaré tinha proposto algum tempo antes; e os dois trabalhos de Einstein sobre os fundamentos da relatividade geral e sobre o princípio de Hamilton aplicado a essa teoria, não obstante também o grande desenvolvimento posteriormente efectuado e que, num ponto, trouxe uma alteração axiomática: o movimento livre dum ponto material num campo de gravitação ao longo duma geodésica do espaço-tempo, postulado inicialmente por Einstein, demonstrou-se ser consequência das equações do campo, graças ao próprio Einstein e a alguns colaboradores; a demonstração é porém laboriosa e, num primeiro estudo, convém proceder como Einstein fez de início.

Os outros seis trabalhos só têm interesse histórico.

O primeiro trabalho de Lorentz refere-se à experiência célebre cujo resultado negativo desencadeou a crise da física do éter que a teoria da relatividade veio resolver; o autor propõe, para explicar esse resultado, a hipótese ad hoc *da contracção longitudinal dos corpos em movimento, para a qual sugere uma explicação molecular.*

O segundo trabalho de Lorentz contém uma teoria complicada, destinada a explicar o resultado negativo dessa e das outras experiências realizadas com o mesmo objectivo, teoria obtida (um tanto imperfeitamente) mediante hipóteses apropriadas relativas à influência do «vento de éter» sobre a forma e dimensões dos electrões e sobre as forças moleculares, donde proviriam deformações nos corpos em movimento de que resultaria apresentarem-se os fenómenos electromagnéticos, observados em qualquer sistema de referência animado de translação uniforme, a obedecer às mesmas leis que num sistema *imóvel. As imperfeições foram corrigidas por Poincaré, num trabalho elaborado dentro das ideias de Lorentz. Figura no trabalho de Lorentz a célebre transformação que tem o seu nome, e a demonstração de que ela deixa invariante a forma das equações de Maxwell para o vácuo; Poincaré estendeu a demonstração ao caso geral, e pôde enunciar o seu postulado de relatividade. Porém esta relatividade era só fenomenológica; segundo a teoria, continuava a existir um corpo de referência privilegiado (embora se furtasse necessàriamente a ser detectado), de que não se prescindia por ser considerado suporte necessário do campo electromagnético. Independentemente desta teoria, que só veio a conhecer mais tarde, Einstein rompeu com tal preconceito, considerando como perfeitamente equivalentes todos aqueles sistemas de referência e substituindo ao princípio newtoniano do tempo absoluto o princípio da constância da velocidade da luz, contido nas equações de Maxwell, para obter a transformação cinemática perante a qual essas equações deviam ser covariantes, como efectivamente verificou que sucedia, ficando assim fundada a teoria da relatividade especial.*

No trabalho sobre a influência da gravidade na propagação da luz, procurando generalizar o princípio da relatividade Einstein formula o princípio da equivalência entre um sistema de referência uniformemente acelerado e um campo de gravitação homogéneo, o que lhe permite descobrir a gravidade da energia e a influência da diferença de potencial da gravidade na marcha dos relógios, donde resulta num campo de gravidade a curvatura dos raios luminosos e o deslocamento, para o vermelho, das riscas espectrais duma fonte luminosa situada num ponto onde aquele potencial é mais baixo. A aplicação ao campo de gravitação do Sol dá a Einstein a previsão de dois fenómenos que veio a deduzir com mais rigor na teoria da relatividade geral: a deflexão dos raios luminosos estelares que passam perto do Sol e o deslocamento, para o vermelho, das riscas do espectro solar. O trabalho é feito dentro da mecânica newtoniana e a lei da gravitação usada para determinar aquela deflexão é a de Newton, motivo por *que Einstein encontra para ela só metade do valor que mais tarde encontrará usando a sua própria lei da gravitação; e é a ordem de grandeza deste último valor que as observações confirmam.*

O trabalho cosmológico de Einstein é a primeira aplicação da teoria da relatividade geral ao problema da estrutura do Universo, empreendida para eliminar dificuldades relativas às condições de fronteira dum espaço infinito. Supondo por isso o espaço finito, de volume fixo, cheio de matéria desagregada de densidade constante, portanto espaço de curvatura constante que supõe positiva, Einstein encontra que só pode ser satisfeita a lei da gravitação se for modificada pela introdução do chamado termo cosmológico, o qual não tem qualquer outra justificação; e então encontra para o Universo o modelo procurado. Este modelo estático, que mais tarde se demonstraria ser instável, tornou-se por isso inaceitável e também por causa da descoberta, feita pouco depois por Hubble (1929), da expansão do Universo, revelada pelo deslocamento, para o vermelho, das riscas espectrais das galáxias proporcionalmente à distância. Já anteriormente Friedmann (1922) tinha encontrado soluções do problema cosmológico com matéria homogèneamente distribuída num espaço de métrica dependente do tempo, mas de curvatura constante a cada instante, positiva, nula ou negativa, as quais existem também sem o termo cosmológico na lei da gravitação. A matéria pode supôr-se um fluido desagregado, como no modelo de Einstein, ou um fluido perfeito. De tudo isto resulta um grande número de modelos cosmológicos, e há-os ainda de outros tipos. A posição final de Einstein sobre a questão cosmológica foi a seguinte, desde 1931: visto existirem para a equação tensorial da gravitação sem termo cosmológico, que tinha sido introduzido ad hoc, *soluções de Friedmann, apresentando expansão do Universo nos três casos da curvatura positiva, nula ou negativa, deve regressar-se à lei da gravitação original e adoptar um destes três modelos, que são todos compatíveis com as observações actuais. Einstein inclinou-se primeiro para o modelo com espaço de curvatura positiva (por este ser certamente finito) segundo o qual o Uni-*

verso se expande a partir dum estado de altíssima (segundo as fórmulas infinita) concentração material para mais tarde se contrair até voltar ao estado original; mas pouco depois, com De Sitter, preferia o modelo com espaço de curvatura nula (pela sua grande simplicidade) segundo o qual o Universo, a partir do mesmo estado singular, se expande ilimitadamente. Em qualquer destes dois casos há para o espaço diversas possibilidades topológicas, e algumas de métrica euclidiana são finitas, o que muitas vezes se ignora. A descoberta duma radiação de fundo cosmológica isotrópica de 3° K, na região das microondas, parece justificar o estado original que indicam estes modelos; e a descoberta de que as radiofontes extragalácticas extremamente afastadas, que são os «quasars», ocorrem em posições antipódicas indica que se está perante a mais simples das possibilidades topológicas do primeiro caso, ou seja o espaço esférico de Riemann, como no modelo original de Einstein mas com raio actualmente crescente.

No trabalho sobre a questão de saber se o campo de gravitação desempenha algum papel na estrutura das partículas elementares então conhecidas, Einstein supõe-as formadas por pura electricidade, de modo que a realidade física é constituída por elas, pelo campo electromagnético e pelo campo gravitacional. A lei da gravitação sob a forma mais geral mantém-se: nela figurará o tensor energético de Maxwell para o espaço onde não há carga eléctrica; mas esse tensor terá de ser adicionado de termos complementares para o interior das partículas, porque dentro delas a sua divergência não é nula. Einstein postula que a lei da gravitação dentro das partículas elementares se pode escrever sob a forma que denomina livre de escalares a qual, com as equações da teoria dos electrões, lhe permite demonstrar que nestas partículas a repulsão eléctrica é equilibrada por uma pressão gravitacional. Fora das partículas prova-se que o escalar de curvatura é constante; isto também se deduz da lei da gravitação, e o confronto faz aparecer, por um lado, a constante cosmológica como pura constante de integração e, por outro lado, dá os termos complementares *procurados, de origem puramente gravitacional. Mas prova-se também que qualquer distribuição de electricidade, estática e de simetria esférica, está em equilíbrio, e assim a atomicidade da electricidade não fica explicada. Não surpreende tal resultado naquela época, visto que mesmo hoje o problema das partículas elementares não pode considerar-se resolvido. Duas correntes se defrontam nesta questão. A da geometrodinâmica, que em última análise provém do próprio Einstein, fundamentada em que a teoria da relatividade geral admite a existência de campos de gravitação sem fontes e atribuindo ao espaço uma topologia muito mais complicada do que ordinàriamente se supõe, procura construir modelos de partículas elementares de modo puramente geométrico: regiões espacio-temporais em que a métrica deixa de ser indefinida, e por isso se comportam como impenetráveis. A outra corrente, a da física quântica, pretende explicar essas partículas a partir de campos de ondas de matéria e sua quantificação, com uma interpretação estatística.*

O trabalho de Weyl sobre gravitação e electricidade, finalmente, contém a primeira tentativa duma teoria unificada dos campos gravitacional e electromagnético, apoiada numa generalização da geometria riemanniana em que além da não integrabilidade da direcção se postula a não integrabilidade do comprimento. Muitas outras tentativas surgiram em seguida, umas, como a de Weyl, caracterizadas por uma generalização da geometria riemanniana quadridimensional, outras, desde a de Kaluza (1921), caracterizadas por uma geometria riemanniana especial de mais de quatro dimensões (geralmente cinco, mas podendo ser seis). Entre as da primeira espécie contam-se a de Einstein do paralelismo a distância e a de Einstein-Schrödinger do tensor fundamental assimétrico; entre as da segunda espécie figuram a de Einstein-Mayer, a teoria projectiva de Veblen e outras análogas até à de Jordan-Thiry, e a de Podolanski cuja geometria é de seis dimensões. Nenhuma delas é satisfatória e algumas foram abandonadas pelos próprios autores. Contra a de Weyl, por exemplo, Einstein objectou que, segundo ela, a marcha dum relógio dependeria em geral *da pré-história do relógio, o que, aplicado aos relógios atómicos, daria o resultado de não haver riscas bem definidas nos respectivos espectros, o que é contrário aos factos; Weyl modificou depois a sua atitude quanto a este ponto, mas com prejuízo da conexão entre electromagnetismo e métrica: de essencialmente física, a conexão tornou-se meramente formal. Com a descoberta do campo das forças nucleares as tentativas de teoria unificada de qualquer daquelas duas espécies têm rareado. De tipo diferente é a «teoria já unificada» de Rainich (1925), Misner e Wheeler (1957), que afirma que a lei da gravitação de Einstein e as equações de Maxwell contêm implìcitamente a unificação pretendida; na ausência de termo cosmológico, como é preferível, essa teoria condensa-se num pequeno número de equações tensoriais e numa desigualdade que só envolvem (não linearmente) o tensor de Riemann contraído, ou tensor de Ricci, e que se resolvem introduzindo um tensor fictício de 2.ª ordem que satisfaça às equações de Maxwell, construindo, com este, outro tensor de 2.ª ordem que se igualará, multiplicado pelo usual factor constante, ao tensor de Ricci, e integrando a equação tensorial assim obtida, o que determina a métrica do espaço-tempo. A simplificação conseguida pela introdução daquele tensor fictício é tão considerável, que se foi levado a atribuir-lhe realidade física admitindo a existência dum campo electromagnético independente daquela métrica.*

Terminaremos mencionando brevemente as verificações experimentais de que tem sido objecto a teoria da relatividade. Quanto à relatividade especial, há a observar desde logo que é comprovada por todos os factos que comprovam a teoria electromagnética de Maxwell--Lorentz, porque esta teoria é relativista sem modificação, dada a covariância das respectivas equações gerais perante a transformação de Lorentz. Depois, há factos que esta teoria só podia explicar mediante hipóteses auxiliares e que a teoria da relatividade explica sem elas: a lei do movimento do electrão, que Lorentz encontrou admitindo que o electrão se contrai ao mover-se no éter; a experiência de Fizeau, que Lorentz explicou fazendo certas hipóteses sobre a *estrutura da matéria; o resultado negativo de todas as experiências destinadas a evidenciar o movimento da Terra relativamente ao éter, de que falámos anteriormente. As equações do movimento de partículas eléctricas em campos electromagnéticos têm sido verificadas para diversas velocidades, mesmo próximas da velocidade da luz. As fórmulas de transformação da energia e do impulso têm-se verificado directamente no estudo das colisões de partículas de alta energia, produzidas no laboratório ou observadas nos raios cósmicos. As leis de transformação do campo electromagnético também têm sido verificadas experimentalmente. A fórmula da dilatação do tempo tem sido verificada na determinação da vida média de mesões animados de diversas velocidades, tanto produzidos no laboratório como observados nos raios cósmicos. Sem a dilatação do tempo não chegariam à superfície da Terra os mesões* μ *produzidos pelos raios cósmicos na atmosfera superior, ainda que se movessem com a velocidade da luz, tão pequena é a sua vida média em tempo próprio (isto pode considerar-se também como verificação da contracção longitudinal dos comprimentos: para um observador ligado ao mesão a espessura da atmosfera seria de alguns metros apenas). Outra verificação experimental da dilatação do tempo é a do efeito de Doppler transversal, conseguida tomando a média das frequências da risca* H_β *emitida por raios canais de hidrogénio a favor e contra o movimento, o que eliminou o efeito de 1.ª ordem, muito mais forte, que encobria aquele. A equivalência da massa e da energia, que Einstein sugeriu poder verificar-se nos fenómenos da radioactividade por causa das grandes quantidades de energia neles envolvidas, tem-se verificado em todas as reacções nucleares para as quais se medem independentemente a perda de energia e as massas das partículas reagentes e produzidas pela reacção. Trata-se nestes casos de variações de massa e de energia. Mas a descoberta do electrão positivo e da aniquilação mútua dele e do electrão negativo com produção de radiação gamma revelou um fenómeno em que toda a massa das duas partículas se converte em energia radiante. O processo inverso também se observa: um fotão gamma colidindo com* *um núcleo atómico pode converter-se num par de electrões, positivo e negativo. Mais tarde descobriu-se o antiprotão (protão negativo) e a aniquilação mútua dele e do protão positivo com produção de radiação gamma. Sabe-se agora que para cada espécie de partícula há uma antipartícula, que se aniquila com a partícula produzindo energia. Em todos os casos se verifica a lei de Einstein, que é hoje uma das bases mais certas da física nuclear. Como resultado de todas as verificações experimentais efectuadas, a teoria da relatividade especial considera-se sòlidamente estabelecida.*

Quanto à verificação experimental da teoria da relatividade geral, há que mencionar primeiro a confirmação extremamente precisa da equivalência entre massa pesada e massa inerte, sem a qual a aceleração gravitacional não seria a mesma para todos os corpos. Verificada com precisão crescente por Galileu, Newton e Bessel, veio a sê-lo com a alta precisão de 10^{-8} por Eötvös, e com a de 10^{-11} por Dicke mais recentemente. É a mais precisa de todas as verificações experimentais que interessam à teoria da relatividade geral. As outras verificações efectuadas dizem respeito aos três efeitos previstos por Einstein: o deslocamento, para o vermelho, das riscas espectrais da luz proveniente duma fonte situada num lugar de potencial de gravitação mais baixo, o avanço residual dos perihélios planetários, em especial o de Mercúrio, e a deflexão dos raios luminosos que passam perto do Sol. Quanto ao deslocamento para o vermelho, procurou-se inicialmente a sua verificação na luz do Sol e das estrelas; mas as medições são difíceis, e a sua interpretação é duvidosa por causa da existência de efeitos não gravitacionais à superfície do astro que produzem também deslocamento das riscas. Contudo para as anãs brancas, por causa da sua grande densidade, o deslocamento gravitacional para o vermelho é muito maior do que no caso do Sol, e a verificação qualitativa do efeito não oferece dúvidas; mas há algumas quanto à verificação quantitativa, porque às causas perturbadoras apontadas junta-se a incerteza no conhecimento da massa e, sobretudo, do raio da estrela. Mais recentemente conseguiu-se aper-

feiçoar a técnica das observações, isolando-se melhor o efeito gravitacional no caso do Sol; assim Brault verificou o efeito com suficiente precisão na parte central da risca D_1 do sódio, que provém duma região do Sol situada abaixo da atmosfera superior turbulenta. É uma boa verificação. Mas melhor ainda é a que Pound e Rebka obtiveram para o campo gravitacional terrestre, que não está sujeito àquelas influências perturbadoras, medindo o deslocamento para o vermelho entre duas posições situadas a alguns metros de distância, na mesma vertical, mediante aplicação do efeito de Mössbauer, descoberto em 1958, que permite emitir e receber raios gamma monocromáticos em tão alto grau que se torna mensurável um pequeníssimo deslocamento da respectiva risca espectral; o resultado confirmou a teoria com boa precisão, que experiências mais recentes elevaram a 1 °/₀. Sobre o avanço residual dos perihélios planetários, ou seja a diferença entre o avanço observado e o avanço explicado pela teoria das perturbações da mecânica celeste newtoniana, que se conhece para os três planetas mais próximos do Sol, pode dizer-se que ele é bem explicado pela teoria da relatividade geral, sobretudo no caso de Mercúrio, onde é mais forte e mais acessível à observação por causa da maior rapidez do movimento e da maior excentricidade da órbita. A explicação deste fenómeno pela teoria de Einstein tem para ela grande importância porque envolve todas as componentes do potencial da gravitação. Recentemente Dicke tentou pôr em dúvida o valor desta verificação experimental da teoria conjecturando um achatamento do Sol que explicaria o fenómeno; mas Adler e outros provaram que a fórmula para o avanço residual dos perihélios, que se deduz de tal hipótese dentro da teoria newtoniana da gravitação, explica pior os factos do que a fórmula relativista. Finalmente a deflexão dos raios luminosos que passam perto do Sol está verificada quantitativamente quanto à ordem de grandeza; o efeito é muito pequeno, as observações são difíceis e até 1970 só se faziam durante eclipses solares. Pode dizer-se que elas concordavam com a teoria dentro duma incerteza de 20 °/₀; em todo o caso não verificavam a ordem *de grandeza do efeito calculado por meio da lei de Newton, que é metade do previsto por meio da lei de Einstein.*

Há actualmente meios técnicos que dão possibilidades novas de verificação da teoria da relatividade geral, como foi o caso do efeito de Mössbauer. Recentemente Shapiro mediu o tempo de regresso de ecos de radar de Mercúrio e de Vénus quando estes planetas passam atrás do Sol e encontrou o aumento previsto pela teoria com a precisão de 10 °/₀ (6 °/₀ para Mercúrio, 1970). Também recentemente (1970) Seielstad, Muhleman e colaboradores mediram a variação sofrida pela distância angular de dois «quasars» quando o Sol se aproxima da direcção dum deles, sendo confirmada a teoria com a precisão de 11 °/₀. São experiências que podem repetir-se frequentemente, com precisão que se espera melhorar. Têm-se sugerido medições fotoeléctricas fora dos eclipses para a deflexão dos raios luminosos no campo solar; a utilização de relógios atómicos em satélites artificiais para o equivalente do deslocamento para o vermelho; a observação de satélites ou planetas artificiais para o avanço residual dos perihélios, com observações radiotelescópicas para melhor determinação das órbitas; e outros meios. São de prever, nos próximos anos, progressos importantes na verificação experimental da teoria da relatividade geral.

Coimbra, 1971

MANUEL DOS REIS

Professor catedrático jubilado da Universidade de Coimbra

PREFÁCIOS

PREFÁCIO DAS PRIMEIRA E SEGUNDA EDIÇÕES

A conferência de Minkowski «Raum und Zeit», publicada no ano de 1909 como trabalho autónomo prefaciado por A. Gutzmer, esgotou-se já. Deve-se ao sr. Sommerfeld uma feliz sugestão para que a nova e desejada edição viesse ampliada, para incluir os trabalhos originais de base relativos ao princípio da relatividade. A amável anuência dos srs. H. A. Lorentz e Einstein tornou possível a realização de tal plano. É assim que o presente opúsculo aparece como uma colectânea de documentos relativos à história do princípio da relatividade, incluindo a exposição das ideias de Lorentz, o primeiro grande trabalho de Einstein e a conferência de Minkowski, com a qual surge a popularidade do princípio da relatividade. O primeiro tomo da colecção «Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien», em que o presente opúsculo é publicado, inclui as duas publicações de Minkowski na sua forma completa, podendo assim servir-lhe de complemento.

Aachen, Maio de 1913.

Otto Blumenthal

PREFÁCIO DA TERCEIRA EDIÇÃO

As primeira e segunda edições desta «colectânea de documentos relativos à história do princípio da relatividade» estão esgotadas. O Conhecimento deu entretanto um largo passo em frente: Einstein estendeu à relatividade geral o princípio linear da relatividade. A nova edição deve dar conta desse desenvolvimento e, para isso, inclui a memória de Einstein, já publicada em livro (por J. A. Barth), «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie», e, além dela, quatro notas do mesmo autor. Essas notas marcam, por um lado, o início das suas meditações sobre a relatividade geral e, por outro, apresentam as mais recentes concepções, ainda em embrião, e apontam o caminho para o ulterior desenvolvimento. Deste modo, a presente publicação vai-nos guiar através da teoria da relatividade em construção, conduzindo-nos do piso térreo até alturas em que os vigamentos se erguem ainda livremente para o céu.

Aachen, Outubro de 1919.

Otto Blumenthal

PREFÁCIO DAS QUARTA E QUINTA EDIÇÕES

Com inesperada e agradável rapidez se tornou necessária nova edição. No essencial ela vem sem alterações. Juntou-se-lhe, porém, de novo, o conhecido ensaio de Weyl «Gravitation und Elektrizität».

Aachen, Setembro, 1921 e 1923.

Otto Blumenthal

H. A. LORENTZ

A EXPERIÊNCIA INTERFERENCIAL DE MICHELSON

FENÓMENOS ELECTROMAGNÉTICOS NUM SISTEMA QUE SE MOVE COM QUALQUER VELOCIDADE INFERIOR À DA LUZ

A EXPERIÊNCIA INTERFERENCIAL DE MICHELSON *

1. Foi, pela primeira vez, notado por Maxwell — e deduz-se com um cálculo muito simples — que o intervalo de tempo que é necessário a um raio de luz para efectuar um percurso de ida e volta entre dois pontos A e B muda de valor logo que esses pontos entrem solidàriamente em movimento, sem arrastarem consigo o éter. É certo que essa variação de valor é uma quantidade de segunda ordem de grandeza, mas é, no entanto, suficientemente grande para poder ser posta em evidência por um método interferencial sensível.

Tal método foi posto em prática por Michelson no ano de 1881 **. O seu aparelho era uma espécie de interferómetro com dois braços horizontais, P e Q, de igual comprimento, perpendiculares entre si. Dos dois feixes interferentes, um fazia o seu percurso de ida e volta ao longo do braço P e o outro ao longo do braço Q. Todo o instrumento, incluindo a fonte luminosa e o dispositivo de observação, podia rodar em volta de um eixo vertical, tomando-se especialmente em consideração as duas posições em que um dos braços, ou P ou Q, tinha, tão aproximadamente quanto

---

* Extraído de «Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern» (Leiden 1895), §§ 89 a 92.

** Michelson, American Journal of Science (3) 22 (1881), pág. 120.

possível, a mesma direcção que o movimento terrestre. Esperava-se então, com fundamento na teoria de Fresnel, que as franjas de interferência sofressem um deslocamento quando, por rotação, o aparelho passasse de uma daquelas «posições principais» para a outra.

De tal desvio de franjas, que a alteração no tempo de propagação deveria determinar, e a que por brevidade, chamaremos desvio de Maxwell, não se encontrou porém o menor vestígio, e por isso entendeu Michelson poder concluir que o éter não permanece em repouso durante o movimento da Terra, conclusão esta cuja justeza em breve viria a ser contestada, Com efeito, Michelson tinha erròneamente avaliado no dobro do seu verdadeiro valor a alteração das diferenças de fase, que, segundo a teoria, seria de esperar; se este erro for corrigido, chega-se a desvios que podiam ainda ficar encobertos pelos erros de observação.

Michelson retomou mais tarde esta investigação, em colaboração com Morley *, tendo então melhorado a sensibilidade, obrigando para isso cada feixe luminoso a reflectir-se diversas vezes entre vários espelhos. Este artifício equivalia a um alongamento considerável dos braços do primitivo aparelho. Os espelhos tinham pesados suportes de pedra a flutuar em mercúrio para poderem rodar fàcilmente.

Cada feixe de luz tinha agora que efectuar um percurso total de 22 metros, e era de esperar, com a teoria de Fresnel, um desvio de 0,4 da distância entre as franjas de interferência, quando se passasse de uma posição principal para a outra. No entanto, na rotação, só se verificaram desvios não superiores a 0,02 da distância entre as franjas, os quais bem podiam resultar de erros de observação.

---

* Michelson and Morley, American Journal of Science (3) 34 (1887), pág. 333; Phil. Mag. (5) 24 (1887), pág. 449.

Dever-se-á, com base neste resultado, aceitar que o éter toma parte no movimento da Terra e, deste modo, que a teoria da aberração de Stokes é a teoria correcta? As dificuldades que esta teoria encontra na explicação da aberração parecem-me demasiado grandes para poder aceitar esta opinião e, pelo contrário, levaram-me antes a procurar a maneira de remover a contradição entre a teoria de Fresnel e o resultado de Michelson.

Consegui isso com uma hipótese que tinha apresentado algum tempo antes * e que, como depois vim a saber, também ocorrera a Fitzgerald **. No parágrafo seguinte mostrarei em que consiste tal hipótese.

2. Para simplificar, admitiremos que se utiliza um instrumento análogo ao da primeira experiência, e que numa das posições principais o braço P está orientado exactamente na direcção do movimento da Terra. Seja $\mathfrak{p}$ a velocidade deste movimento e L o comprimento de cada um dos braços, portanto $2L$ o percurso do raio da luz. Segundo a teoria ***, a translação terrestre dá origem a que o tempo necessário a um feixe de luz para efectuar o seu percurso de ida e volta em P, exceda em

$$L \cdot \frac{\mathfrak{p}^2}{V^3}$$

o tempo que o outro feixe leva a efectuar o seu percurso. A mesma diferença se encontraria se, não tendo a translação

---

* Lorentz, Zittingsverslagen der Akad. v. Wet, te Amsterdam, 1892-93, pág. 74.

** Como Fitzgerald muito amàvelmente me comunicou, ele tinha já, desde há muito tempo, utilizado nas suas lições a sua hipótese. Na literatura só a encontrei mencionada em Lodge, no artigo «Aberration problems» (London Phil. Trans. 184 A [1893], pág. 727).

*** Cf. Lorentz, Arch. néerl. 21 (1887), págs. 168-176.

qualquer influência, o comprimento do braço P, excedesse o do braço Q em $L \cdot \frac{p^2}{2V^2}$. O mesmo acontece para a segunda posição principal.

Vemos assim que as diferenças de fase previstas pela teoria também se poderiam produzir se na rotação do aparelho cada um dos braços fosse, alternadamente, mais comprido que o outro.

Daqui resulta que estas mudanças de fase poderão ser compensadas fazendo nas dimensões dos braços modificações que se oponham a elas.

Se admitirmos que o braço colocado segundo a direcção do movimento da Terra é mais curto do que o outro, sendo $L \cdot \frac{p^2}{2V^2}$ a diferença de comprimentos, e, ao mesmo tempo, que a translação tem a influência prevista pela teoria de Fresnel, então o resultado da experiência de Michelson fica completamente explicado. Ter-se-ia assim que postular que o movimento de um corpo sólido através do éter em repouso, por exemplo o de uma vara de latão, ou o do suporte de pedra utilizada na segunda experiência, tem sobre as suas dimensões uma influência que varia com a orientação do corpo em relação à direcção do movimento. Se, por exemplo, as dimensões paralelas à direcção do movimento forem alteradas na relação de 1 para $1 + \delta$ e as dimensões perpendiculares à mesma direcção o forem na relação de 1 para $1 + \varepsilon$, deverá ser

$$(1) \qquad \varepsilon - \delta = \frac{p^2}{2V^2}$$

O valor de uma das grandezas δ ou ε ficaria, assim, indeterminado: tanto poderia ser $\varepsilon = 0$, $\delta = -\frac{p^2}{2V^2}$ como $\varepsilon = \frac{p^2}{2V^2}$, $\delta = 0$, como ainda $\varepsilon = \frac{p^2}{4V^2}$ e $\delta = -\frac{p^2}{4V^2}$.

3. Por muito surpreendente que a hipótese à primeira vista se apresente, dever-se-á reconhecer no entanto que ela se torna mais acessível se se admitir para as forças moleculares aquilo que presentemente já se pode afirmar em segurança para as forças eléctricas e magnéticas: que elas também se transmitem através do éter.

Se assim for, é extremamente provável que a translação produza na interacção de duas moléculas ou átomos uma alteração semelhante à que produz nas atracções ou repulsões entre partículas com carga.

Ora, como a forma e dimensões de um corpo sólido são, em última instância, condicionadas pela intensidade das acções moleculares, não poderá então deixar de se verificar também uma alteração nas dimensões.

Do ponto de vista teórico nada há, pois, a objectar contra a hipótese. Pelo que respeita à prova experimental, há a notar, antes de mais nada, que os referidos alongamentos e encurtamentos são extraordinàriamente pequenos. Tem-se $p^2/V^2 = 10^{-8}$ e, assim, se se fizer $\varepsilon = 0$, obtém-se para valor da contracção de um diâmetro terrestre cerca de 6,5 cm. Mas para o comprimento de uma barra métrica a variação é de cerca de $^1/_{200}$ de micron quando essa barra se leva de uma das posições principais para a outra. Só com um método interferencial se poderia esperar êxito na captação de um valor tão pequeno como este. Seria então necessário operar com duas barras perpendiculares, obrigando um de dois feixes de luz mùtuamente interferentes a percorrer em ida e volta a primeira dessas barras, e o outro a percorrer a segunda. Mas deste modo voltava-se de novo à experiência de Michelson, e não se poderia observar absolutamente nenhum desvio nas franjas de interferência durante a rotação do aparelho. Invertendo um raciocínio que atrás se fez, poder-se-ia dizer agora que o desvio proveniente das variações de comprimento é compensado pelo desvio de Maxwell.

4. É digno de menção o facto de se poder chegar directamente à variação de dimensões acima postulada se, em *primeiro lugar*, admitirmos, sem ter em conta o movimento molecular, que num corpo sólido abandonado a si próprio, as forças de atracção e repulsão que actuam sobre uma dada molécula se equilibram mùtuamente; e se, em *segundo lugar*, aplicarmos às forças moleculares — decerto sem qualquer fundamento para isso — o princípio que num lugar anterior desta obra * estabelecemos para as acções electrostáticas. Com efeito, designemos agora por S_1 e S_2, não, como naquele local, dois sistemas de partículas carregadas, mas sim dois sistemas de moléculas — o segundo em repouso e o primeiro com a velocidade $\mathfrak{p}$ na direcção do eixo do x. Admita-se que entre as dimensões dos dois sistemas existe a relação que havíamos estabelecido para os sistemas de partículas carregadas 1) e admita-se ainda que nos dois sistemas as componentes das forças segundo o eixo do x são as mesmas, ao passo que as componentes segundo os eixos do y e do z diferem entre si pelo factor $\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}$; é então claro que as forças em S_1 se equilibram sempre que isso aconteça em S_2. Por consequência, se S_2 for o estado de equilíbrio de um corpo sólido em repouso, em S_1 as moléculas terão exactamente aquelas posições em que podem permanecer sob a influência da translação.

O deslocamento deveria naturalmente conduzir por si mesmo a esta disposição e assim, segundo as fórmulas dadas

* Designadamente no § 23 do livro: Versuch einer Theorie der elektrischen und Optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.

no referido local, deveria produzir um encurtamento na direcção do movimento na relação de 1 para $\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}$. Isto conduz aos valores

$$\delta = -\frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}, \ \varepsilon = 0,$$

que concorda com (1).

Na realidade, as moléculas de um corpo não se encontram em repouso, mas sim em movimento estacionário para cada estado de equilíbrio. Não se discutirá aqui a influência que esta circunstância tem nos fenómenos observados; mas seja ela qual for, as experiências de Michelson e Morley deixam uma razoável margem para os valores de δ e ε, por causa dos inevitáveis erros de observação.

Nota do Tradutor

1) Essa relação é a seguinte: Na passagem de S_2 para S_1 as dimensões paralelas ao eixo do x são multiplicadas por kl, sendo l uma função da velocidade de translação $\mathfrak{p}$, e sendo $k = \sqrt{1-\mathfrak{p}^2/V^2}$; enquanto que as dimensões paralelas aos eixos do y e do z são apenas multiplicadas por l (cf. o § 10 do artigo que se segue a este, e ainda «The Theory of Electrons», Lorentz, 2nd edition, Dover Publications, pág. 202).

FENÓMENOS ELECTROMAGNÉTICOS NUM SISTEMA QUE SE MOVE COM QUALQUER VELOCIDADE INFERIOR À DA LUZ *

1. Quando se procura determinar, através de considerações teóricas, a influência que poderia exercer sobre os fenómenos eléctricos e magnéticos uma translação, como por exemplo aquela a que todos os sistemas estão sujeitos por virtude do movimento anual da Terra, chega-se à solução de maneira relativamente simples quando apenas for necessário considerar aquelas grandezas que são proporcionais à primeira potência da relação entre a velocidade de translação w e a velocidade da luz c. Maiores dificuldades levantam, porém, os casos em que sejam detectáveis quantidades de segunda ordem, isto é da ordem de $\frac{w^2}{c^2}$. O primeiro exemplo deste género é a bem conhecida experiência interferencial de Michelson, cujo resultado negativo nos levou, a mim e a Fitzgerald, à conclusão de que as dimensões dos corpos rígidos se modificam um pouco em consequência do seu movimento através do éter.

Algumas outras experiências em que se investigou um efeito de segunda ordem foram recentemente publicadas.

---

* Tradução em alemão do artigo publicado em língua inglesa: Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light (Proceedings Acad. Sc. Amsterdam 6 [1904], pág. 809).

Rayleigh * e Brace ** investigaram se o movimento da Terra pode comunicar a um corpo a propriedade de produzir dupla refracção. À primeira vista, isto seria de esperar, desde que se admita a variação de dimensões que acaba de ser mencionada. No entanto, o resultado a que os dois físicos chegaram foi negativo.

Posteriormente Trouton e Noble *** procuraram detectar a presença de um momento de rotação actuando sobre um condensador carregado, cujos pratos façam um ângulo com a direcção da translação terrestre. A teoria dos electrões exige sem dúvida a existência de um tal momento, a não ser que essa teoria seja modificada com a introdução de uma nova hipótese. Para verificar isso, bastará considerar um condensador que tenha como dieléctrico o éter. Pode provar-se que em todo o sistema electrostático que se move com a velocidade $\mathfrak{w}$**** há «uma certa quantidade de movimento electromagnético». Se a representarmos, em direcção e grandeza, por um vector $\mathfrak{G}$, o momento de rotação mencionado será determinado pelo produto vectorial *****:

$$(1) \qquad [\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{w}].$$

Ora, se escolhermos como eixo do $\mathfrak{z}$ uma perpendicular aos pratos do condensador, tendo a velocidade $\mathfrak{w}$ uma direc-

* Rayleigh, Phil. Mag. (6) 4 (1902), pág. 678.

** Brace, Phil. Mag. (6) 7 (1904), pág. 317.

*** Trouton e Noble, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 202, 1903, pág. 165. *Uma descrição desta experiência é dada em Theoretical Physics, by Georg Joos, 2.ª ed., pág. 468* (N. T.).

**** Um vector será designado por uma letra gótica e a sua grandeza pela correspondente letra latina.

***** Ver o meu artigo «Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronen Theorie» na Mathematischen Encyklopädie (V 14, § 21a). A referência a este artigo será feita com a indicação «M. E.».

ção arbitrária; e se for U a energia do condensador, calculada da maneira habitual, as componentes de $\mathfrak{G}$ são dadas pelas seguintes fórmulas, exactas até à primeira ordem *:

$$\mathfrak{G}_x = \frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_x, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_y, \quad \mathfrak{G}_z = 0.$$

Substituindo estes valores em (1), obteremos para componentes do momento, com exactidão até à segunda ordem:

$$\frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_y\mathfrak{w}_z, \quad -\frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_x\mathfrak{w}_z, \quad 0.$$

Estas expressões mostram que o eixo do momento é paralelo aos planos dos pratos, e é perpendicular à translação. Se for α o ângulo entre a velocidade e a normal aos pratos, a grandeza do momento será $\frac{U}{c^2}w^2$ sen 2α; ele tende a fazer rodar o condensador para uma posição em que os pratos fiquem paralelos ao movimento terrestre.

No aparelho de Trouton e Noble o condensador estava fixado à haste de uma balança de torção com sensibilidade suficiente para ser deflectida por um momento com a ordem de grandeza mencionada. Nenhum efeito pôde no entanto ser observado.

2. As experiências de que falei não são a única razão que torna desejável um novo exame dos problemas relacionados com o movimento da Terra **. Em relação à teoria até agora aplicada aos fenómenos eléctricos e ópticos dos corpos em movimento Poincaré opôs como objecção o facto de ter sido necessária a introdução de uma nova hipótese para explicar o resultado negativo de Michelson, e de isto

---

* M. E., § 56, c.

** Poincaré, Rapports du Congrès de Physique de 1900, Paris, 1, págs. 22-23.

poder vir a ser necessário cada vez que novos factos se tornem conhecidos. É sem dúvida um pouco artificial este recurso à invenção de hipóteses especiais para cada novo resultado experimental. Seria mais satisfatório que fosse possível mostrar, por meio de certas hipóteses fundamentais e sem desprezar termos de nenhuma ordem de grandeza, que muitas acções electromagnéticas são completamente independentes do movimento do sistema. Há alguns anos tinha eu já procurado construir uma teoria deste género *. Creio que é agora possível tratar o assunto com melhor resultado. A velocidade será apenas sujeita à restrição de ser menor do que a velocidade da luz.

3. Tomarei como ponto de partida as equações fundamentais da teoria dos electrões **. Seja $\mathfrak{d}$ o deslocamento eléctrico no éter, $\mathfrak{h}$ a força magnética, ρ a densidade volumétrica da carga de um electrão, $\mathfrak{v}$ a velocidade de uma partícula dessas, $\mathfrak{f}$ a força ponderomotriz, isto é, a força, medida por unidade de carga, que o éter exerce sobre um elemento de volume de um electrão. Então, se utilizarmos um sistema de coordenadas fixo, teremos

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0, \\ &\operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}} + \rho \mathfrak{v}), \\ &\operatorname{rot} \mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}}, \\ &\quad \mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}]. \end{aligned}\right.$$

Admitirei agora que o sistema se move como um todo na direcção do eixo do x com uma velocidade constante w,

* Lorentz, Zittingverslag Akad. Wet. 7 (1899), pág. 507; Amsterdam Proc. 1898-99, pág. 427.

** M. E., § 2.

e designarei por $\mathfrak{u}$ qualquer velocidade que um ponto do electrão tenha além desta, de modo que $\mathfrak{v}_x = w + \mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{v}_y = \mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{v}_z = \mathfrak{u}_z$.

Se, ao mesmo tempo, as equações (2) se referirem a eixos que se movam com o sistema, elas tomarão a forma

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_x + \frac{1}{c}\rho\,(w + \mathfrak{u}_x),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_y + \frac{1}{c}\rho\,\mathfrak{u}_y,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_z + \frac{1}{c}\rho\,\mathfrak{u}_z,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_x,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_y,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_z,$$

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{d}_x + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{u}_z\mathfrak{h}_y),$$

$$\mathfrak{f}_y = \mathfrak{d}_y - \frac{1}{c}w\,\mathfrak{h}_z + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_z\mathfrak{h}_x - \mathfrak{u}_x\mathfrak{h}_z),$$

$$\mathfrak{f}_z = \mathfrak{d}_z + \frac{1}{c}w\,\mathfrak{h}_y + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_x\mathfrak{h}_y - \mathfrak{u}_y\mathfrak{h}_x).$$

4. Vamos agora transformar estas fórmulas por introdução de novas variáveis. Tomando

$$\frac{c^2}{c^2 - w^2} = k^2 \tag{3}$$

e designando por l uma outra quantidade numérica a determinar mais tarde, tomarei como novas variáveis independentes

$$x' = klx, \quad y' = ly, \quad z' = lz \tag{4}$$

$$(5) \qquad t' = \frac{l}{k}\,t - kl\frac{w}{c^2}\,x,$$

e definirei dois novos vectores pelas fórmulas

$$\mathfrak{d}'_x = \frac{1}{l^2}\mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{d}'_y = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{d}_y - \frac{w}{c}\mathfrak{h}_z\right), \quad \mathfrak{d}'_z = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{d}_z + \frac{w}{c}\mathfrak{h}_y\right),$$

$$\mathfrak{h}'_x = \frac{1}{l^2}\mathfrak{h}_x, \quad \mathfrak{h}'_y = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{h}_y + \frac{w}{c}\mathfrak{d}_z\right), \quad \mathfrak{h}'_z = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{h}_z - \frac{w}{c}\mathfrak{d}_y\right),$$

que em virtude de (3) também poderemos escrever:

$$(6)\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{d}_x = l^2\mathfrak{d}'_x, \quad \mathfrak{d}_y = kl^2\left(\mathfrak{d}'_y + \frac{w}{c}\mathfrak{h}'_z\right), \quad \mathfrak{d}_z = kl^2\left(\mathfrak{d}'_z - \frac{w}{c}\mathfrak{h}'_y\right),\\ &\mathfrak{h}_x = l^2\mathfrak{h}'_x, \quad \mathfrak{h}_y = kl^2\left(\mathfrak{h}'_y - \frac{w}{c}\mathfrak{d}'_z\right), \quad \mathfrak{h}_z = kl^2\left(\mathfrak{h}'_z + \frac{w}{c}\mathfrak{d}'_y\right).\end{aligned}\right.$$

O coeficiente l deve ser uma função de w tal que para $w = 0$ tome o valor 1 e para pequenos valores de w só difira de 1 em quantidades de segunda ordem.

A variável t' pode ser designada por «tempo local»; com efeito, para $k = 1$, $l = 1$, ela identifica-se com o que anteriormente designei por esse nome. Tomemos finalmente:

$$(7) \qquad \frac{1}{kl^3}\,\rho = \rho',$$

$$(8) \qquad k^2\mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}'_x, \quad k\mathfrak{u}_y = \mathfrak{u}'_y, \quad k\mathfrak{u}_z = \mathfrak{u}'_z,$$

e consideremos estas últimas grandezas como componentes de um novo vector $\mathfrak{u}'$. Então as equações tomarão a seguinte forma [1]:

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\operatorname{div}'\,\mathfrak{d}' = \left(1 - \frac{w\mathfrak{u}'_x}{c^2}\right)\rho', \quad \operatorname{div}'\,\mathfrak{h}' = 0,\\ &\operatorname{rot}'\,\mathfrak{h}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial t'} + \rho'\mathfrak{u}'\right),\\ &\operatorname{rot}'\,\mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial t'},\end{aligned}\right.$$

$$
(10)\begin{cases}
\mathfrak{f}_x = l^2\mathfrak{d}'_x + l^2\frac{1}{c}(\mathfrak{u}'_y\mathfrak{h}'_z - \mathfrak{u}'_z\mathfrak{h}'_y) + l^2\frac{w}{c^2}(\mathfrak{u}'_y\mathfrak{d}'_y + \mathfrak{u}'_z\mathfrak{d}'_z),\\
\mathfrak{f}_y = \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}'_y + \frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathfrak{u}'_z\mathfrak{h}'_x - \mathfrak{u}'_x\mathfrak{h}'_z) - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}'_x\mathfrak{d}'_y,\\
\mathfrak{f}_z = \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}'_z + \frac{l^2}{k}\frac{1}{c}(\mathfrak{u}'_x\mathfrak{h}'_y - \mathfrak{u}'_y\mathfrak{h}'_x) - \frac{l^2}{k}\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}'_x\mathfrak{d}'_z.
\end{cases}
$$

Os símbolos div′ e rot′ de (9) correspondem aos símbolos div e rot em (2), com a diferença apenas de que a diferenciação em relação a x, y, z deve ser substituída pela diferenciação em relação a x', y', z' *.

5. As equações (9) levam à conclusão de que os vectores $\mathfrak{d}'$ e $\mathfrak{h}'$ são representáveis por um potencial escalar φ' e por um potencial vector $\mathfrak{a}'$.

Estes potenciais satisfazem as equações **

$$
(11)\qquad \Delta'\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} = -\rho',
$$

---

* Deve notar-se que, neste trabalho, eu não cheguei a atingir totalmente as equações de transformação da teoria da relatividade de Einstein. Nem a equação (7) nem as fórmulas (8) têm a forma dada por Einstein e, em consequência disso, não cheguei a fazer desaparecer o termo $-\frac{w\mathfrak{u}'_x}{c^2}$ na primeira equação (9), pelo que não consegui dar às fórmulas (9) uma forma rigorosamente válida para um sistema em repouso. Dependem desta circunstância os embaraços em que esbarram muitas das considerações ulteriores deste trabalho.

Pertence a Einstein o mérito de ter sido o primeiro a enunciar o princípio da relatividade como uma lei geral, rígida e exacta.

Acrescento a isto a observação de que Voigt já no ano de 1887 (Göttinger Nachrichten, pág. 41), num trabalho «Über das Dopplersche Prinzip» aplicou a equações da forma

$$
\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0
$$

uma transformação que é equivalente à contida nas equações (4) e (5) do meu trabalho (observação de H. Lorentz, 1912).

** M. E. §§ 4 e 10.

$$(12) \qquad \Delta' \mathfrak{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{a}'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{c^2}\rho' \mathfrak{u}'.$$

Os vectores $\mathfrak{d}'$ e $\mathfrak{h}'$ podem ser representados em função dos potenciais da seguinte maneira:

$$(13) \qquad \mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{a}'}{\partial t'} - \text{grad}' \varphi' + \frac{w}{c}\,\text{grad}' \mathfrak{a}'_x,$$

$$(14) \qquad \mathfrak{h}' = \text{rot}' \mathfrak{a}'.$$

O símbolo Δ' é uma abreviatura para $\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$ e grad' φ' designa um vector cujas componentes são $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial z'}$; a expressão grad' $\mathfrak{a}'_x$ tem um significado correspondente.

Para obter de maneira simples a solução de (11) e (12), tomemos x', y', z' como coordenadas de um ponto P' num espaço S' e atribuamos a este ponto para cada valor de t', os valores ρ', $\mathfrak{u}'$, φ', $\mathfrak{a}'$, que pertencem ao ponto correspondente P (x, y, z) do sistema electromagnético. Para um dado valor t' da quarta variável independente, os potenciais φ' e $\mathfrak{a}'$ no ponto P do sistema, ou no ponto correspondente P' do espaço S', são dados pelas equações *:

$$(15) \qquad \varphi' = \frac{1}{4\pi}\int \frac{[\rho']}{r'}\,dS',$$

$$(16) \qquad \mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{[\rho' \mathfrak{u}']}{r'}\,dS'.$$

Aqui dS' é um elemento do espaço S', r' a sua distância a P', e os parênteses designam a grandeza ρ' e o vector ρ' $\mathfrak{u}'$ tais como eles se apresentam no elemento dS' para o valor $t' - \frac{r'}{c}$ da quarta variável independente.

---

* M. E. §§ 5 e 10.

Em vez de (15) e (16) podemos também, tendo em conta (4) e (7), escrever:

$$(17) \qquad \varphi' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\rho]}{r'} dS.$$

$$(18) \qquad \mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c} \int \frac{[\rho \mathfrak{u}']}{r'} dS.$$

sendo aqui as integrações feitas sobre o próprio sistema electromagnético. Deve ter-se bem em conta que, nestas equações, r' não designa a distância entre o elemento dS e o ponto (x, y, z) para o qual se deve efectuar o cálculo.

Se o elemento se caracterizar pelo ponto (x_1, y_1, z_1) deveremos tomar

$$r' = l \sqrt{k^2 (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

Se quisermos determinar φ' e $\mathfrak{a}'$ para o instante em que o tempo local em P é igual a t', deveremos dar a ρ e a $\rho \mathfrak{u}'$ o valor que eles possuem no elemento dS, no tempo local $t' - \frac{r'}{c}$ desse elemento.

6. Basta considerar dois casos particulares para o fim que temos em vista, começando pelo de um sistema electrostático, isto é, um sistema em que o único movimento é uma translação de velocidade w. Neste caso é $\mathfrak{u}' = 0$, portanto, em virtude de (12), $\mathfrak{a}' = 0$.

Além disso, φ' é independente de t', de modo que as equações (11), (13) e (14) se simplificam em

$$(19) \qquad \begin{cases} \Delta' \varphi' = -\rho', \\ \mathfrak{d}' = -\operatorname{grad}' \varphi', \quad \mathfrak{h}' = 0. \end{cases}$$

Depois de termos determinado com estas equações o vector $\mathfrak{d}'$, ficamos também a conhecer a força eléctrica que actua sobre electrões do sistema. Como $\mathfrak{u}' = 0$, as equações (10) referentes a ela tomam a forma

$$(20) \qquad \mathfrak{f}_x = l^2\, \mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{f}_y = \frac{l^2}{k}\, \mathfrak{d}'_y, \quad \mathfrak{f}_z = \frac{l^2}{k}\, \mathfrak{d}'_z.$$

O resultado pode exprimir-se numa forma simples se se comparar o sistema móvel Σ, que estamos agora a considerar, com um sistema em repouso Σ'.

Este deve obter-se de Σ multiplicando os comprimentos paralelos ao eixo do x por kl e os paralelos aos eixos do y e do z por l. Usaremos como símbolo adequado para esta deformação (kl, l, l). Neste novo sistema, que podemos considerar colocado no espaço S' acima mencionado, dêmos à densidade o valor ρ', calculado com (7), de tal modo que sejam iguais em Σ e Σ' as cargas de elementos de volumes correspondentes e de electrões correspondentes. Obteremos então as forças que actuam sobre os electrões do sistema móvel Σ, se antes determinarmos as forças correspondentes em Σ' e depois multiplicarmos as suas componentes na direcção do eixo de x por l^2 e as componentes perpendiculares a essas por $\frac{l^2}{k}$. Usaremos como fórmula adequada para exprimir isto a equação

$$(21) \qquad \mathfrak{F}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right) \mathfrak{F}(\Sigma').$$

Notemos ainda que, com o auxílio do valor de $\mathfrak{d}'$ calculado por meio de (19), se podem exprimir fàcilmente as quantidades de movimento no sistema móvel, ou antes, as suas componentes na direcção do movimento. Com efeito, a equação

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c} \int [\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{h}]\, dS,$$

mostra que

$$\mathfrak{G}_x = \frac{1}{c}\int(\mathfrak{d}_y\,\mathfrak{h}_z - \mathfrak{d}_z\,\mathfrak{h}_y)\,dS$$

donde, em vista de (6), e por ser $\mathfrak{h}' = 0$:

$$(22)\quad \mathfrak{G}_x = \frac{k^2 l^4 w}{c^2}\int(\mathfrak{d}'^2_y + \mathfrak{d}'^2_z)\,dS = \frac{k\,l\,w}{c^2}\int(\mathfrak{d}'^2_y + \mathfrak{d}'^2_z)\,dS'.$$

7. Como segundo caso especial consideremos uma partícula com um momento eléctrico, isto é, um pequeno espaço S com a carga total nula $\int \rho\, dS = 0$, mas com uma tal densidade de distribuição que os integrais $\int \rho x dS$, $\int \rho y dS$, $\int \rho z dS$ têm valores diferentes de zero.

Sejam x, y, z as coordenadas tomadas em relação a um ponto fixo A da partícula — ao qual chamaremos centro — e definamos o momento eléctrico por um vector $\mathfrak{p}$ com as componentes

$$(23)\quad \mathfrak{p}_x = \int \rho\,\mathrm{x}\,dS, \qquad \mathfrak{p}_y = \int \rho\,\mathrm{y}\,dS, \qquad \mathfrak{p}_z = \int \rho\,\mathrm{z}\,dS.$$

É então

$$(24)\quad \frac{d\mathfrak{p}_x}{dt} = \int \rho\,\mathfrak{u}_x\,dS, \quad \frac{d\mathfrak{p}_y}{dt} = \int \rho\,\mathfrak{u}_y\,dS, \quad \frac{d\mathfrak{p}_z}{dt} = \int \rho\,\mathfrak{u}_z\,dS.$$

Se x, y, z forem considerados infinitamente pequenos, também naturalmente o serão $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$. Desprezaremos os quadrados e os produtos destas seis grandezas.

Utilizaremos agora a equação (17) no cálculo do pontencial escalar φ' para um ponto exterior P (x, y, z) a uma distância finita da partícula polarizada, no instante em que o tempo local deste ponto tem um determinado valor t'. Ao fazermos isto, daremos ao símbolo $[\rho]$, que em (17) corresponde ao instante em que o tempo local em dS é igual a $t' - \frac{r'}{c}$, um significado um pouco diferente.

Designemos por r'_0 o valor de r' para o centro A e entendamos então por $[\rho]$ o valor da densidade no ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ no instante t_0 em que o tempo local de A é igual a $t' - \frac{r'_0}{c}$.

De (5) resulta que este instante é anterior àquele a que se refere o numerador de (17), antecedendo-o em

$$k^2 \frac{w}{c^2} \mathbf{x} + \frac{k}{l} \frac{r'_0 - r'}{c} = k^2 \frac{w}{c^2} \mathbf{x} + \frac{k}{l} \frac{1}{c} \left(\mathbf{x} \frac{\partial r'}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial r'}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial r'}{\partial z} \right)$$

unidades de tempo. Nesta última expressão podemos tomar para as derivadas os seus valores no ponto A.

Temos agora que substituir em (17) $[\rho]$ por

$$(25) \quad [\rho] + k^2 \frac{w}{c^2} \mathbf{x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + \frac{k}{l} \frac{1}{c} \left(\mathbf{x} \frac{\partial r'}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial r'}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial r'}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right]$$

onde $\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right]$ se refere, outra vez, ao instante t_0. Se tivermos fixado o valor t' para o qual o cálculo deve ser efectuado, este tempo t_0 será uma função das coordenadas x, y, z do ponto exterior P.

O valor $[\rho]$ dependerá consequentemente destas coordenadas, e fàcilmente se vê que

$$\frac{\partial [\rho]}{\partial x} = - \frac{k}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial r'}{\partial x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right], \text{ etc.}$$

Por isso (25) torna-se igual a

$$[\rho] + k^2 \frac{w}{c^2} \mathbf{x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] - \left(\mathbf{x} \frac{\partial [\rho]}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial [\rho]}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial [\rho]}{\partial z} \right).$$

Por outro lado, se designarmos daqui em diante por r' a grandeza a que acima chamámos r'_0, o factor $\frac{1}{r'}$ deverá ser substituído por

$$\frac{1}{r'} - \mathrm{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) - \mathrm{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) - \mathrm{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right)$$

de modo que, finalmente, o elemento dS que figura no integral (17) deve ser multiplicado por

$$\frac{[\rho]}{r'} + k^2\frac{w}{c^2}\frac{\mathrm{x}}{r'}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{x}[\rho]}{r'} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{y}[\rho]}{r'} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{z}[\rho]}{r'}$$

Esta forma é mais simples do que a original porque nem r' nem o tempo para o qual se devem considerar as grandezas entre parênteses dependem de x, y, z. Utilizando (23) e recordando que $\int \rho\, dS = 0$, obtém-se

$$\varphi' = k^2\frac{w}{4\pi c^2 r'}\left[\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial t}\right] - \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\mathfrak{p}_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{[\mathfrak{p}_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{[\mathfrak{p}_z]}{r'}\right\}.$$

Nesta equação, todas as grandezas contidas dentro do parênteses devem ser tomadas para o instante para o qual o tempo local do centro da partícula é igual a $t' - \frac{r'}{c}$.

Encerramos estas considerações com a introdução de um novo vector $\mathfrak{p}'$ cujas componentes são

$$(26) \qquad \mathfrak{p}'_x = kl\mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}'_y = l\mathfrak{p}_y, \quad \mathfrak{p}'_z = l\mathfrak{p}_z$$

Ao mesmo tempo mudamos de variáveis independentes, passando para x', y', z', t'. O resultado final é

$$\varphi' = \frac{w}{4\pi c^2 r'}\frac{\partial[\mathfrak{p}'_x]}{\partial t'} - \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathfrak{p}'_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathfrak{p}'_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathfrak{p}'_z]}{r'}\right\}.$$

A transformação da equação (18) para o potencial vector é menos difícil, porque ela contém o vector infinitamente pequeno $\mathfrak{u}'$.

Atendendo a (8), (24), (26) e (5) encontra-se

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c r'} \frac{\partial [\mathfrak{p}']}{\partial t'}.$$

O campo produzido pela partícula polarizada está agora inteiramente determinado. A equação (13) conduz a

$$(27) \qquad \mathfrak{d}' = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \frac{[\mathfrak{p}']}{r'} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \frac{[\mathfrak{p}'_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{[\mathfrak{p}'_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'} \frac{[\mathfrak{p}'_z]}{r'} \right\},$$

e o vector $\mathfrak{h}'$ é dado por (14). Podemos ainda aplicar as equações (20) em vez das equações originais (10) se quisermos considerar as forças exercidas por uma partícula polarizada sobre outra análoga, colocada a uma certa distância dela. De facto, tal como para a primeira partícula, podemos considerar para a segunda as velocidades $\mathfrak{u}$ como infinitamente pequenas.

Deve notar-se que as equações para um sistema em repouso estão contidas nas fórmulas dadas. Para um tal sistema, as grandezas com «plica» tornam-se idênticas às correspondentes grandezas sem «plica»; além disso k e l tornam-se iguais a 1. As componentes de (27) são ao mesmo tempo as da força eléctrica que uma partícula polarizada exerce sobre outra.

8. Até aqui apenas utilizámos as equações fundamentais sem nenhuma nova hipótese. Farei agora a suposição *de que os electrões que, no estado de repouso, considero como esferas de raio R, sofrem alteração nas suas dimensões por efeito de uma translação, tornando-se kl vezes menores as dimensões paralelas à direc-*

ção do movimento e l vezes menores as perpendiculares àquela direcção.

Durante esta deformação, que pode ser representada por $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$, deve cada elemento de volume conservar a sua carga.

A nossa hipótese conduz a que, num sistema electrostático Σ que se desloca a uma velocidade w, todos os electrões sofrem um achatamento, tornando-se elipsoides cujos eixos menores estão dispostos na direcção do movimento.

Se agora, para podermos aplicar o princípio do § 6, sujeitarmos o sistema à deformação (kl, l, l), novamente obteremos electrões esféricos de raio R. Se, além disso, alterarmos a posição relativa dos centros dos electrões em Σ por meio da deformação (kl, l, l) e colocarmos nos pontos assim obtidos os centros de electrões esféricos em repouso, obteremos um sistema que é idêntico ao sistema imaginário Σ' de que falámos no § 6. As forças neste sistema e as forças no sistema Σ mantêm entre si a relação expressa por (21).

Em segundo lugar, admitirei que as forças entre partículas sem carga, bem como as forças entre tais partículas e electrões, se comportam numa translação exactamente da mesma maneira que as forças eléctricas num sistema electrostático.

Por outras palavras: — Seja qual for a natureza das partículas de um corpo ponderável — contanto que entre elas não haja movimento relativo, devem as forças actuantes no sistema em repouso Σ' estar relacionadas com as actuantes no sistema em movimento Σ pela equação (21), se a correspondência de posição entre partículas for tal que Σ' resulte de Σ pela deformação (kl, l, l) e portanto Σ de Σ' pela deformação $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

Daqui resulta que sempre que a força resultante das forças que actuam sobre uma partícula em Σ' se torna nula, o mesmo deverá acontecer para a correspondente partícula em Σ. Não consideraremos o efeito do movimento molecular e admitiremos que num corpo rígido há, para cada partícula, equilíbrio entre as atracções e repulsões que sobre ela exercem as partículas vizinhas.

Se, além disso, admitirmos mais uma vez que não há senão *uma* configuração de equilíbrio possível, poderemos concluir que o sistema Σ' se transforma, *por si próprio*, no sistema Σ, se se lhe comunicar a velocidade w. Por outras palavras, a translação *produz* a deformação $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

O caso do movimento molecular será considerado no § 12.

Vê-se fàcilmente que a hipótese levantada anteriormente a propósito da experiência de Michelson se mantém no que se acaba de expor. Contudo a presente hipótese é mais geral, porque a única limitação imposta ao movimento é que a sua velocidade seja mais pequena do que a da luz.

9. Estamos agora em posição de calcular a quantidade de movimento electromagnético de um só electrão. Para simplificar, considerarei a carga distribuída sobre a superfície de maneira uniforme, enquanto o electrão estiver em repouso. Então, haverá uma distribuição do mesmo género no sistema Σ', com a qual teremos de entrar em conta no último integral de (22).

Consequentemente será

$$\int (\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2)\, dS' = \frac{2}{3}\int \mathfrak{d}'^2 dS' = \frac{e^2}{6\pi}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{6\pi R}$$

e

$$\mathfrak{G}_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\, klw.$$

Deve ter-se em atenção que o produto kl é uma função de w e que, por razões de simetria, o vector $\mathfrak{G}$ tem a direcção da translação. Se designarmos por $\mathfrak{w}$ a velocidade deste movimento, teremos em geral a equação vectorial

$$(28) \qquad \mathfrak{G} = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} k l \mathfrak{w}.$$

Ora toda a mudança no movimento de um sistema implica uma correspondente alteração na quantidade de movimento electromagnética e requer, por isso, uma certa força cuja grandeza e direcção são dadas por

$$(29) \qquad \mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}.$$

A equação (28) só pode ser aplicada em rigor ao caso de uma translação rectilínea e uniforme. Em virtude desta circunstância, e ainda que (29) continui a ser válida, a teoria de movimentos de variação rápida de um electrão torna-se muito difícil, tanto mais que a hipótese do § 8 implica que a grandeza e a direcção da deformação se modifiquem contìnuamente. É mesmo pouco provável que a forma do electrão fique determinada apenas pela velocidade no instante considerado.

No entanto, obteremos uma aproximação suficiente na utilização de (28) para cada instante, se nos limitarmos a alterações suficientemente lentas de velocidade. A aplicação de (29) sobre uma tal translação *quase estacionária*, como lhe chamou Abraham *, é muito simples.

Seja num determinado instante $\mathfrak{j}_1$ a aceleração na direcção da trajectória e $\mathfrak{j}_2$ a aceleração na direcção perpendi-

---

* Abraham, Ann. Phys. 10 (1903), pág. 105.

cular. Então, a força $\mathfrak{F}$ admite duas componentes, com as direcções destas acelerações dadas por

$$\mathfrak{F}_1 = m_1 \dot{\mathfrak{j}}_1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{F}_2 = m_2 \dot{\mathfrak{j}}_2$$

se

$$m_1 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \frac{d(klw)}{dw} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R} kl. \tag{30}$$

Resulta daqui que o electrão se comporta como se tivesse a massa m_1 nos fenómenos em que intervém uma aceleração na direcção do movimento, e como se tivesse a massa m_2 quando a aceleração é perpendicular à direcção do movimento. Estas grandezas m_1 e m_2 são, por este motivo, adequadamente denominadas de massas electromagnéticas «longitudinal» e «transversal». Admito *que, além delas, não existe qualquer massa «verdadeira» ou «material»*.

Como k e l diferem da unidade por quantidades da ordem de $\frac{w^2}{c^2}$, encontramos para pequenas velocidades

$$m_1 = m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}.$$

Esta é a massa que intervém nos cálculos quando os electrões efectuam pequenas vibrações num sistema sem translação. Quando, porém, as pequenas vibrações dos electrões se verificam num corpo que se move com a velocidade w na direcção do eixo do x, então teremos que entrar nos cálculos com a massa m_1 dada por (30), se considerarmos as vibrações paralelas ao eixo do x; e com a massa m_2, se considerarmos as vibrações paralelas a OY ou OZ.

Assim, em forma abreviada

$$m(\Sigma) = \left(\frac{d(klw)}{dw},\ kl,\ kl\right) m(\Sigma'), \tag{31}$$

onde o símbolo Σ representa o sistema móvel e Σ' o sistema em repouso.

10. Podemos agora passar a investigar a influência do movimento terrestre sobre fenómenos ópticos num sistema de corpos transparentes.

Dirigimos aqui a nossa atenção para os momentos eléctricos variáveis nas partículas, ou «átomos», do sistema. Podemos aplicar a esses momentos o que foi dito no § 7. Para simplificar, admitiremos que em cada partícula a carga está concentrada num certo número de electrões separados. Além disso, as forças «elásticas» que actuam sobre um destes electrões e determinam, juntamente com as forças eléctricas, o seu movimento, devem ter a sua origem dentro dos limites *do mesmo* átomo.

Vou mostrar que cada estado de movimento possível num sistema não animado de translação pode ser posto em correspondência com um estado de movimento, igualmente possível, nesse mesmo sistema, quando animado de translação, sendo a forma dessa correspondência caracterizada do modo seguinte:

a) Sejam A_1', A_2', A_3', etc., os centros das partículas no sistema Σ' que não tem translação. Não entraremos em consideração com movimentos moleculares e suporemos estes pontos em repouso.

O sistema de pontos A_1, A_2, A_3, etc., formado pelos centros das partículas no sistema móvel Σ, obtém-se a partir de A_1', A_2', A_3', etc., por meio de uma deformação $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$.

De acordo com o que foi dito no § 8, os centros das partículas tomarão por si próprios as posições A_1, A_2, A_3, etc., se inicialmente, isto é, antes da translação, eles tiverem ocupado as posições A_1', A_2', A_3', etc.

Vamos imaginar que cada ponto P' do espaço do sistema Σ' se transfere para um determinado ponto P de Σ por efeito da referida deformação. Definiremos ainda uma correspondência temporal para os pontos P' e P, estabelecendo que a localização de P' no tempo verdadeiro é idêntica à localização de P no seu tempo próprio, calculado por meio de (5). Para duas *partículas*, consideraremos como tempos correspondentes aqueles que se correspondem para os *centros* A' e A dessas partículas.

b) Pelo que diz respeito ao estado interno dos átomos, admitiremos que a configuração de uma partícula A em Σ, para um determinado instante, se deduz da configuração da partícula correspondente em Σ, no correspondente instante, por meio de deformação $\left(\frac{1}{kl}, \frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$. Esta hipótese é aplicável à própria forma dos electrões e, nesse caso, está incluída na primeira das hipóteses que fizemos no § 8.

Com as premissas *a*) e *b*) poderemos determinar completamente, como é evidente, um estado do sistema móvel Σ, partindo de um estado efectivamente existente no sistema Σ'. Mas está ainda em aberto a questão de saber se aquele estado assim determinado é ou não um estado possível.

Para decidirmos isto notemos, antes de mais nada, que os momentos eléctricos — que, por hipótese, intervêm no sistema móvel, e que designaremos com o símbolo $\mathfrak{p}$ — são funções determinadas das coordenadas x, y, z, dos centros A das partículas (ou, como diremos, das coordenadas das partículas) e do tempo t. As equações que exprimem as relações entre $\mathfrak{p}$, por um lado, e x, y, z, t, por outro, podem ser substituídas por outras equações, que contêm o vector $\mathfrak{p}'$ calculado com (26) e as grandezas x', y', z', t' definidas por meio de (4) e (5).

Se houver agora um momento eléctrico $\mathfrak{p}$ numa partícula A do sistema móvel, cujas coordenadas sejam x, y, z no tempo t ou no tempo local t', então, de acordo com as premissas *a*) e *b*), existirá também no outro sistema, numa partícula com as coordenadas x', y', z' e no tempo verdadeiro t', um momento que é justamente representado pelo vector $\mathfrak{p}'$ determinado por (26). Vê-se deste modo que as equações entre $\mathfrak{p}'$, x', y', z', t' são as mesmas para os dois sistemas, com a única diferença de que para o sistema Σ', que não tem translação, estes símbolos representam o momento, as coordenadas e o tempo verdadeiro, ao passo que para o sistema móvel têm outra significação: porque aqui $\mathfrak{p}'$, x', y', z', t' estão ligados ao momento $\mathfrak{p}$, às coordenadas x, y, z, e ao tempo geral t pelas relações (26), (4) e (5).

Já foi dito que a equação (27) se aplica a ambos os sistemas. O vector $\mathfrak{d}'$ é por consequência em Σ' o mesmo que em Σ, sob a condição de compararmos sempre locais e tempos correspondentes. No entanto, o vector não tem nos dois casos o mesmo significado: em Σ' ele representa a força eléctrica, ao passo que em Σ representa uma força relacionada com aquela força eléctrica por meio de (20). Podemos, por isso, concluir que as forças eléctricas que em Σ e Σ' actuam, em instantes correspondentes, sobre partículas correspondentes estão entre si relacionadas por meio de (21). Em virtude da nossa premissa *b*) combinada com a segunda hipótese do § 8, a mesma relação tem validade entre forças «elásticas». A equação (21) pode, por consequência, ser considerada também como expressão da relação entre forças totais actuantes entre electrões correspondentes em instantes correspondentes.

É agora claro que o estado que antes atribuímos ao sistema móvel é realmente possível, se em Σ e em Σ' os produtos da massa m pela aceleração de um electrão estiverem entre si na mesma relação que as forças, isto é, se for

$$(32) \qquad m\,\mathrm{j}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right) m\,\mathrm{j}(\Sigma').$$

Ora para as acelerações temos

$$(33) \qquad \mathrm{j}(\Sigma) = \left(\frac{l}{k^3}, \frac{l}{k^2}, \frac{l}{k^2}\right) \mathrm{j}(\Sigma'),$$

como se deduz de (4) e (5). Se combinarmos este resultado com (32) obteremos para as massas

$$m(\Sigma) = (k^3 l, kl, kl)\, m(\Sigma').$$

Um confronto com (31) mostra que, sejam quais forem os valores de l, esta condição é sempre satisfeita pelo que se refere às massas que intervêm nos cálculos relativos a vibrações perpendiculares à direcção de translação. A única condição que há a impor a l será então:

$$\frac{d(klw)}{dw} = k^3 l.$$

Mas como, em virtude de (3)

$$\frac{d(kw)}{dw} = k^3,$$

será

$$\frac{dl}{dw} = 0, \quad l = \text{constante}.$$

O valor da constante deve ser 1, visto que nós sabemos já que, para $w = 0$, é $l = 1$.

Somos assim levados a admitir que *a influência de uma translação sobre a grandeza e a forma (tanto de um electrão isolado como de um corpo ponderável considerado como um todo) fica limitada às dimensões que são paralelas à direcção do movimento, as quais se tornam k vezes menores do que no estado de repouso.*

Se acrescentarmos esta hipótese às que já tínhamos admitido, poderemos afirmar com segurança que se, para um sistema em repouso, é possível um determinado estado, para o mesmo sistema, quando animado de movimento de translação, é possível o estado que corresponde ao primeiro nas condições atrás estipuladas.

Esta correspondência não se restringe, aliás, aos momentos eléctricos das partículas: em pontos correspondentes, quer estejam situados no éter existente entre as partículas, quer estejam no éter que envolve os corpos ponderáveis, encontramos, para tempos correspondentes, o mesmo vector $\mathfrak{d}'$ e, como fàcilmente se prova, o mesmo vector $\mathfrak{h}'$. Podemos então, resumindo, afirmar que: quando no sistema em que não há translação se estabelece um estado de movimento para o qual, num determinado local, as componentes de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$ e $\mathfrak{h}$ são certas funções do tempo, poder-se-á estabelecer no mesmo sistema, depois de posto em movimento (e consequentemente deformado), um estado de movimento em que as componentes de $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{h}'$ são, num local correspondente ao primeiro, as mesmas funções do tempo local.

Sòmente um ponto precisa ainda de ser considerado com maior rigor. Como os valores das massas m_1 e m_2 foram deduzidas da teoria do movimento quase estacionário, levanta-se a questão da legitimidade de os fazer intervir no cálculo quando se trate das rápidas vibrações luminosas. Ora um estudo rigoroso mostra que o movimento de um electrão pode ser tratado como um movimento quase estacionário desde que seja pequena a alteração desse movimento durante o tempo em que uma onda de luz percorre uma distância igual ao diâmetro.

É isso que se dá nos fenómenos ópticos, porque o diâmetro do electrão é extremamente pequeno comparado com os comprimentos de onda.

11. Fàcilmente se vê que a teoria exposta esclarece um grande número de factos.

Comecemos por considerar um sistema sem translação, nalgumas partes do qual se tem permanentemente $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$.

Então, no estado correspondente do sistema animado de movimento, teremos nas partes em correspondência com as primeiras (ou, como alternativamente podemos dizer, naquelas mesmas partes, depois de o sistema ter sofrido deformação) $\mathfrak{p}' = 0$, $\mathfrak{d}' = 0$, $\mathfrak{h}' = 0$.

Como estas equações implicam $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$ como se deduz de (26) e (6), torna-se evidente que todas aquelas partes que fossem escuras quando o sistema estava em repouso, também o seriam com o sistema em movimento. É por isso impossível descobrir uma influência do movimento terrestre em qualquer experiência óptica que seja feita com uma fonte luminosa terrestre e consista na observação da distribuição geométrica de luz e obscuridade. Muitas experiências de interferência e difracção são deste género.

Consideremos em segundo lugar dois raios de luz, em idêntico estado de polarização, que passam em dois pontos de um sistema, propagando-se na mesma direcção. Pode provar-se que a razão das amplitudes que a luz apresenta nestes pontos não é modificada por uma translação. Este facto encontra aplicação nas experiências em que se faz a comparação de intensidades em regiões do campo de visão próximas uma da outra.

As conclusões agora tiradas confirmam resultados anteriores, mas que foram obtidos com raciocínios em que se desprezaram grandezas de segunda ordem. Elas contêm também uma explicação do resultado negativo de Michelson, explicação que é mais geral do que a dada anteriormente e um pouco diferente dela na forma. Elas mostram ainda por que é que Rayleigh e Brace não puderam observar nenhum vestígio de dupla refracção provocada pelo movimento terrestre.

O resultado negativo da experiência de Trouton e Noble torna-se agora claro, desde que invoquemos as hipóteses do § 8. Delas e do nosso último pressuposto (a que fomos conduzidos no § 10) deduz-se que a translação não produz outro efeito que não seja uma contracção de todo o sistema de electrões e outras partículas de que são formados o condensador carregado, a haste e o fio da balança de torção. Uma tal contracção não dá, porém, lugar a qualquer mudança de direcção perceptível.

É quase desnecessário fazer notar que é com todas as reservas que apresento esta teoria. Se bem que, na minha opinião, ela possa dar conta de todos os factos bem estabelecidos, no entanto conduz a algumas consequências que a experiência ainda não permite comprovar. Por exemplo, deduz-se da teoria que o resultado da experiência de Michelson deve continuar negativo, se os feixes luminosos interferentes se fizerem passar através de um corpo ponderável transparente.

«A priori», não se pode afirmar que a nossa hipótese sobre a contracção dos electrões seja plausível nem, tão pouco, que seja inadmissível. O que nós sabemos sobre a natureza dos electrões é muito pouco, e o único meio de progredir consiste em submeter tais hipóteses a provas, como fiz aqui. Surgem, naturalmente, dificuldades: por exemplo, logo que entremos em consideração com a rotação dos electrões. Talvez para os fenómenos em que há rotação de electrões esféricos, com o sistema em repouso, se deva admitir que os pontos isolados desses electrões passam a descrever órbitas elípticas quando o sistema entra em movimento, havendo entre essas órbitas e as órbitas circulares descritas com o sistema em repouso a correspondência especificada no § 6.

12. Devemos ainda dizer algumas palavras sobre o movimento molecular. Podemos imaginar que também os corpos em que esse movimento tem uma influência sensível ou mesmo predominante sofrem as mesmas deformações que os sistemas em que até agora temos falado, para os quais é constante a posição relativa das partículas.

Com efeito, em cada um de dois sistemas moleculares Σ' e Σ, dos quais só o segundo tem uma translação, podemos imaginar movimentos moleculares em correspondência tal que, se uma partícula de Σ' ocupa, num determinado instante, uma determinada posição, também uma partícula em Σ ocupará no instante correspondente a correspondente posição. Assente isto, poderemos utilizar a relação (33) entre as acelerações em todos os casos para os quais a velocidade do movimento molecular seja muito pequena em comparação com w. Nestes casos podem as forças moleculares considerar-se determinadas pelas posições relativas, independentemente das velocidades do movimento molecular. Se, finalmente, considerarmos a acção destas forças restringida a distâncias tão pequenas que, para as partículas interactuantes, a diferença de tempos locais se possa desprezar, então uma partícula forma com aquelas que se encontram no seu domínio de atracção ou repulsão um sistema sujeito à deformação de que nos temos vindo a ocupar.

Em vista disto, e atendendo à segunda hipótese do § 8, poderemos aplicar a equação (21) à resultante das forças moleculares que actuam sobre a partícula. Em consequência, verificar-se-á em ambos os casos a necessária relação entre as forças e as acelerações, *desde que admitamos que as massas de todas as partículas são influenciadas por uma translação, no mesmo grau em que o são as massas electromagnéticas dos electrões.*

13. Os valores (30) que eu encontrei para as massas longitudinal e transversal de um electrão em função da velocidade não coincidem com os encontrados anteriormente por Abraham. A razão deve procurar-se só no facto de na teoria de Abraham os electrões serem tratados como esferas de dimensões invariáveis. Ora, os resultados de Abraham, pelo que diz respeito à massa transversal, são confirmados de modo notável pelas medições feitas por Kaufmann sobre os desvios sofridos pelos raios do rádio em campos eléctricos e magnéticos. Para não deixar subsistir uma objecção muito séria contra a minha teoria, terei que provar que estas medições coincidem quase tão bem com os meus resultados como com os de Abraham.

Começarei por me referir a duas séries de medições que Kaufmann * publicou no ano de 1902. De cada série deduziu ele duas quantidades η e ζ, os desvios «reduzidos» eléctricos e magnéticos, que dependem da relação $\beta = \frac{w}{c}$ do modo seguinte:

$$\beta = k_1 \frac{\zeta}{\eta}, \qquad \psi(\beta) = \frac{\eta}{k_2 \zeta^2}. \tag{34}$$

A função $\psi(\beta)$ tem um valor tal que a massa transversal é

$$m_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \psi(\beta) \tag{35}$$

sendo k_1 e k_2 constantes em cada série de medições. Da segunda equação (30) resulta que a minha teoria também conduz a uma equação da forma (35); deve apenas substituir-se a função de Abraham $\psi(\beta)$ por

$$\frac{4}{3} k = \frac{4}{3} (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

---

* Kaufmann, Phys. Zeitschr. 4 (1902), pág. 55.

A minha teoria exige pois que as equações (34) continuem válidas depois de se substituir nelas $\psi(\beta)$ por este valor. Naturalmente, ser-nos-á permitido, para obter uma boa coincidência, atribuir a k_1 e k_2 valores diferentes dos de Kaufmann; e, além disso, tomar para cada medição um valor apropriado para a velocidade w ou para a relação β. Se exprimirmos os novos valores por sk_1, $\frac{3}{4} k_2'$ e β' poderemos escrever (34) na forma

$$\beta' = s k_1 \frac{\zeta}{\eta} \tag{36}$$

e

$$(1 - \beta'^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{k_2' \zeta^2}. \tag{37}$$

Para pôr à prova as suas equações, Kaufmann escolheu um valor tal para k_1 que, tanto quanto possível, os valores de β e k_2 com ele calculados por meio de (34) ficassem constantes em cada série de medições. Esta constância era a prova de uma coincidência suficiente.

Adoptei um procedimento análogo quando me servi de alguns dos números calculados por Kaufmann. Calculei para cada medição o valor da expressão

$$k_2' = (1 - \beta'^2)^{-\frac{1}{2}} \psi(\beta) k_2 \tag{38}$$

que se obtém quando se combina (37) com a segunda equação (34).

Os valores para $\psi(\beta)$ e k_2 são tirados das tabelas de Kaufmann e para β' tomei o valor que obtive multiplicando por s o valor β encontrado por Kaufmann. Escolhi o coeficiente s de tal modo que se obtivesse para a quantidade (38) uma boa estabilidade. Os resultados constam das tabelas seguintes, que correspondem às tabelas III e IV do trabalho de Kaufmann.

III. $s = 0{,}933$

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,851	2,147	1,721	0,794	2,246
0,766	1,86	1,736	0,715	2,258
0,727	1,78	1,725	0,678	2,256
0,6615	1,66	1,727	0,617	2,256
0,6075	1,595	1,655	0,567	2,175

IV. $s = 0{,}954$

β	$\psi(\beta)$	k_2	β'	k_2'
0,963	3,23	8,12	0,919	10,36
0,949	2,86	7,99	0,905	9,70
0,933	2,73	7,46	0,890	9,28
0,883	2,31	8,32	0,842	10,36
0,860	2,195	8,09	0,820	10,15
0,830	2,06	8,13	0,792	10,23
0,801	1,96	8,13	0,764	10,28
0,777	1,89	8,04	0,741	10,20
0,752	1,83	8,02	0,717	10,22
0,732	1,785	7,97	0,698	10,18

Como se vê, a estabilidade de k'_2 não é menos satisfatória do que a de k_2, tanto mais que, em cada um dos casos, s foi calculado a partir apenas de duas medições. O coeficiente foi escolhido por forma que, para as duas observações que figuram em primeiro e em penúltimo lugares na tabela III, e em primeiro e em último na tabela IV, os valores de k'_2 sejam proporcionais aos de k_2.

Vou considerar agora duas séries de medições tomadas de uma publicação posterior de Kaufmann *, as quais foram tratadas por Von Runge ** pelo método dos mínimos

* Kaufmann, Gött. Nachr., Math.-Phys. Klasse 1903, pág. 90.
** Runge, loc. cit., pág. 326.

quadrados. Aí os coeficientes k_1 e k_2 são calculados de tal modo que os valores de η calculados com as equações de Kaufmann (34), para cada ζ observado, coincidam o melhor possível com os valores de η observados.

Eu calculei, com a mesma condição, e igualmente pelo método dos mínimos quadrados, os coeficientes a e b da equação

$$\eta^2 = a\,\zeta^2 + b\zeta^4$$

que se deduz das minhas equações (36) e (37).

Conhecendo a e b, calculei β para cada medição com a relação

$$\beta = \sqrt{a}\,\frac{\zeta}{\eta}.$$

Para duas chapas fotográficas sobre as quais Kaufmann mediu os desvios eléctricos e magnéticos, obtêm-se os seguintes resultados, que apresentam os desvios expressos em centímetros.

Chapa n.º 15. $a = 0{,}06489$, $b = 0{,}3039$

	η					β	
	Observado	Calculado por R.	Dif.	Calculado por L.	Dif.	Calculado por R.	Calculado por L.
0,1495	0,0388	0,0404	— 16	0,0400	— 12	0,987	0,951
0,199	0,0548	0,0550	— 2	0,0552	— 4	0,964	0,918
0,2475	0,0716	0,0710	+ 6	0,0715	+ 1	0,930	0,881
0,296	0,0896	0,0887	+ 9	0,0895	+ 1	0,889	0,842
0,3435	0,1080	0,1081	— 1	0,1090	— 10	0,847	0,803
0,391	0,1290	0,1297	— 7	0,1305	— 15	0,804	0,763
0,437	0,1524	0,1527	— 3	0,1532	— 8	0,763	0,727
0,4825	0,1788	0,1777	+ 11	0,1777	+ 11	0,724	0,692
0,5265	0,2033	0,2039	— 6	0,2033	0	0,688	0,660

Chapa n.º 19 $a = 0{,}05867$, $b = 0{,}2591$

	η					β	
	Observado	Calculado por R.	Dif.	Calculado por L.	Dif.	Calculado por R.	Calculado por L.
0,1495	0,0404	0,0388	+ 16	0,0379	+ 25	0,990	0,954
0,199	0,0529	0,0527	+ 2	0,0522	+ 7	0,969	0,923
0,247	0,0678	0,0675	+ 3	0,0674	+ 4	0,939	0,888
0,296	0,0834	0,0842	— 8	0,0844	— 10	0,902	0,849
0,3435	0,1019	0,1022	— 3	0,1026	— 7	0,862	0,811
0,391	0,1219	0,1222	— 3	0,1226	— 7	0,822	0,773
0,437	0,1429	0,1434	— 5	0,1437	— 8	0,782	0,736
0,4825	0,1660	0,1665	— 5	0,1664	— 4	0,744	0,702
0,5265	0,1916	0,1906	+ 10	0,1902	+ 14	0,709	0,671

Não tive tempo para calcular as outras tabelas do trabalho de Kaufmann. Como, porém, tal como a tabela relativa à chapa n.º 15, elas começam com uma diferença negativa relativamente grande entre os valores de η que foram observados e os que foram calculados por Von Rugen, poderemos esperar uma coincidência bastante com as minhas fórmulas.

Nota do Tradutor

1) Sobre este cálculo pode ver-se a obra já citada «The Theory of Electrons», Lorentz, 2nd edition, Dover Publications, pág. 326.

A. EINSTEIN

SOBRE A ELECTRODINÂMICA DOS CORPOS EM MOVIMENTO

A INÉRCIA DE UM CORPO SERÁ DEPENDENTE DO SEU CONTEÚDO ENERGÉTICO?

SOBRE A ELECTRODINÂMICA DOS CORPOS EM MOVIMENTO *

Como é sabido, a Electrodinâmica de Maxwell — tal como actualmente se concebe — conduz, na sua aplicação a corpos em movimento, a assimetrias que não parecem ser inerentes aos fenómenos. Consideremos, por exemplo, as acções electrodinâmicas entre um íman e um condutor. O fenómeno observável depende aqui ùnicamente do movimento relativo do condutor e do íman, ao passo que, segundo a concepção habitual, são nìtidamente distintos os casos em que o móvel é um, ou o outro, destes corpos. Assim, se for móvel o íman e estiver em repouso o condutor, estabelecer-se-á em volta do íman um campo eléctrico com um determinado conteúdo energético, que dará origem a uma corrente eléctrica nas regiões onde estiverem colocadas porções do condutor. Mas se é o íman que está em repouso e o condutor que está em movimento, então, embora não se estabeleça em volta do íman nenhum campo eléctrico, há no entanto uma força electromotriz que não corresponde a nenhuma energia, mas que dá lugar a correntes eléctricas de grandeza e comportamento iguais às que tinham no primeiro caso as produzidas por forças eléctricas — desde que, nos dois casos considerados, haja identidade no movimento relativo.

---

* Reproduzido de Ann. d. Phys. 17 (1905).

Exemplos deste género, assim como o insucesso das experiências feitas para constatar um movimento da Terra em relação ao meio luminífero («Lichtmedium») levam à suposição de que, tal como na Mecânica, também na Electrodinâmica os fenómenos não apresentam nenhuma particularidade que possa fazer-se corresponder à ideia de um repouso absoluto. Pelo contrário, em todos os sistemas de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica, também são igualmente válidas leis ópticas e electrodinâmicas da mesma forma — o que, até à primeira ordem de aproximação, já está demonstrado *. Vamos erguer à categoria de postulado esta nossa suposição (a cujo conteúdo chamaremos daqui em diante «Princípio da Relatividade»); e, além disso, vamos introduzir o postulado — só aparentemente incompatível com o primeiro — de que a luz, no espaço vazio, se propaga sempre com uma velocidade determinada, independente do estado de movimento da fonte luminosa. Estes dois postulados são suficientes para chegar a uma electrodinâmica de corpos em movimento, simples e livre de contradições, baseada na teoria de Maxwell para corpos em repouso. A introdução de um «éter luminífero» revelar-se-á supérflua, visto que na teoria que vamos desenvolver não necessitaremos de introduzir um «espaço em repouso absoluto», nem de atribuir um vector velocidade a qualquer ponto do espaço vazio em que tenha lugar um processo electromagnético.

Essa teoria vai apoiar-se — como qualquer outra Electrodinâmica — na cinemática do corpo sólido rígido, uma vez que as proposições de uma teoria deste género consistem

* O trabalho de H. A. Lorentz anteriormente reproduzido não era ainda conhecido do autor.

na afirmação de relações entre corpos rígidos (sistemas de coordenadas), relógios e processos electromagnéticos. A insuficiente atenção a este facto é a raiz das dificuldades com que presentemente se defronta a electrodinâmica dos corpos em movimento.

I. Parte Cinemática

§ 1. *Definição de simultaneidade*

Consideremos um sistema de coordenadas em que sejam válidas as equações da Mecânica de Newton *. Chamar-lhe-emos «sistema em repouso», para verbalmente o distinguirmos dos sistemas de coordenadas que mais tarde vamos introduzir, e para precisar ideias. Se um ponto material estiver em repouso em relação a este sistema de coordenadas, a sua posição em relação a ele pode determinar-se mediante o emprego de réguas rígidas e a utilização de métodos da geometria euclidiana, e pode exprimir-se em coordenadas cartesianas.

Se quisermos descrever o *movimento* de um ponto material, não teremos mais do que dar o valor das suas coordenadas em função do tempo. Mas devemos agora ter em atenção que uma tal descrição matemática só tem sentido físico se definirmos claramente o que aqui se entende por «tempo». Temos que ter em conta que todas as nossas apreciações em que intervém o tempo são sempre apreciações sobre *acontecimentos simultâneos*. Quando eu digo, por exemplo: «aquele comboio chega aqui às 7 horas», isto significa: «a indicação 7 dada pelo ponteiro pequeno do meu reló-

---

* Deve entender-se: «válidas em primeira aproximação».

gio e a chegada do comboio são acontecimentos simultâneos» *.

Poderia parecer que todas as dificuldades em que tropeça a definição de «tempo» poderiam ser eliminadas se, em vez de tempo, eu dissesse «posição do ponteiro pequeno do meu relógio»; uma tal definição satisfaz, de facto, quando se trata de definir «tempo» exclusivamente para o lugar em que se encontra colocado o relógio; mas a definição já não basta quando se pretenda estabelecer uma relação temporal entre séries de acontecimentos que se desenrolam em lugares diversos, ou — o que equivale ao mesmo — quando se trata de localizar no tempo acontecimentos que se produzem longe do relógio.

Poderíamos, é certo, contentar-nos com uma ordenação temporal dos acontecimentos, feita por meio de um observador colocado na origem das coordenadas e munido de um relógio. Este observador receberia os sinais luminosos enviados através do espaço vazio por cada um desses acontecimentos, e ordenaria estes segundo as indicações dadas pelo relógio à chegada dos respectivos sinais.

Mas uma tal coordenação tem a desvantagem de não ser independente da localização do observador, como mostra a experiência. Chegaremos a um processo de determinação muito mais prático através da consideração seguinte.

Se num ponto A do espaço estiver situado um relógio, torna-se possível para um observador que também aí se encontre determinar temporalmente os acontecimentos da vizinhança imediata de A, bastando-lhe para isso recor-

---

* A inexactidão que há no conceito da simultaneidade de dois acontecimentos que se produzem (aproximadamente) no mesmo lugar, e que também tem de ser resolvida por uma abstracção, não será discutida aqui.

rer a posições do ponteiro do relógio que sejam simultâneas a tais acontecimentos. Se no ponto B do espaço também se encontrar um relógio que seja — importa acentuá-lo — um «relógio de funcionamento idêntico ao relógio de A», também um observador colocado em B poderá fazer a determinação temporal dos acontecimentos que ocorram na vizinhança imediata de B. Mas não é possível, se não se estabelecerem ulteriores condições, fazer a comparação temporal de um acontecimento em A com um acontecimento em B: até agora temos apenas um «tempo A» e um «tempo B», mas não definimos um «tempo» comum a A e B. Este tempo pode ser definido agora, se estabelecermos *como definição* que o tempo de que a luz necessita para ir de A até B é igual ao tempo de que ela necessita para ir de B até A. Isto é: se um raio de luz partir de A para B no instante t_A do «tempo A», se reflectir em B, na direcção de A, no instante t_B do «tempo B», e chegar de novo a A no instante t_A' do «tempo A», então diremos, por definição, que os dois relógios funcionam em sincronismo se

$$t_B - t_A = t'_A - t_B.$$

Admitiremos que esta definição de sincronismo se pode aplicar, sem conduzir a contradições, a um número arbitrário de pontos, sendo assim universalmente válidas as seguintes relações:

1. Se o relógio em B é síncrono com o relógio em A, também o relógio em A é síncrono com o relógio em B.
2. Se o relógio em A é síncrono com o relógio em B e também com o relógio em C, então os relógios em B e C são síncronos entre si.

Estabelecemos assim por meio de certas experiências físicas (idealizadas) o que se deve entender por sincronismo de relógios situados em repouso em lugares diferentes. É evidente que se obtém deste modo uma definição para os conceitos de «simultâneo» e de «tempo». «Tempo» de um acontecimento será então a indicação, simultânea desse acontecimento, que é fornecida por um relógio que satisfaz às seguintes condições: está colocado em repouso, no local do acontecimento; é síncrono de um outro relógio em repouso, mantendo-se esse sincronismo em todas as determinações de tempo. Admitiremos ainda, em concordância com a experiência, que a grandeza

$$\frac{2\,\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V$$

é uma constante universal (velocidade da luz no espaço vazio).

É essencial o facto de termos definido o tempo por meio de relógios em repouso num sistema em repouso.

Por causa desta relação com o sistema em repouso, chamaremos ao tempo assim definido «tempo do sistema em repouso».

§ 2. *Sobre a relatividade de comprimentos e tempos*

As reflexões que se seguem apoiam-se no princípio da relatividade e no princípio da constância da velocidade da luz, que vamos definir da seguinte maneira:

1. As leis segundo as quais se modificam os estados dos sistemas físicos são as mesmas, quer sejam referidas a um determinado sistema de coordenadas, quer o sejam a qualquer outro que tenha movimento de translação uniforme em relação ao primeiro.

2. Qualquer raio de luz move-se no sistema de coordenadas «em repouso» com uma velocidade determinada V,

que é a mesma, quer esse raio seja emitido por um corpo em repouso, quer o seja por um corpo em movimento. Aqui

$$\text{velocidade} = \frac{\text{percurso efectuado pela luz}}{\text{intervalo de tempo}},$$

onde «intervalo de tempo» deve ser entendido no sentido fixado na definição 1.

Considere-se uma haste rígida em repouso; seja l o seu comprimento, medido com uma régua que está igualmente em repouso. Suponhamos agora que o eixo da haste coincide com o eixo X do sistema de coordenadas em repouso, e que se dá à haste um movimento uniforme de translação de velocidade v, ao longo do eixo X, no sentido de x crescente. Procuremos determinar o comprimento da haste *em movimento*, imaginando para isso as duas operações seguintes:

a) O observador acompanha no seu movimento a haste que pretende medir, levando consigo a régua anteriormente mencionada, e mede directamente o comprimento da haste sobrepondo-lhe a régua, exactamente como se haste, observador e régua estivessem em repouso.

b) O observador determina quais são os pontos do sistema em repouso que coincidem no instante t com a origem e a extremidade da haste, empregando para isso relógios síncronos, situados, em repouso, no sistema em repouso, de acordo com o que foi dito no § 1. A distância entre estes dois pontos, medida com a régua já utilizada, mas agora em repouso, é igualmente um comprimento, que se pode designar por «comprimento da haste».

De acordo com o princípio da relatividade, deve o comprimento que se encontrar na operação *a*), e que vamos designar por «comprimento da haste no sistema móvel», ser igual ao comprimento l da haste em repouso.

O comprimento que se vai encontrar na operação *b*), e que vamos designar por «comprimento da haste (móvel) no sistema em repouso», vai calcular-se tomando como base os nossos dois princípios; e vamos chegar à conclusão de que ele não é igual a l.

A cinemática usual admite tàcitamente que os comprimentos determinados com as duas referidas operações são exactamente iguais, ou, por outras palavras, que um corpo rígido em movimento no instante t, é inteiramente equivalente, do ponto de vista geométrico, ao *mesmo* corpo considerado *em repouso*, numa determinada posição.

Imaginemos agora que aos dois extremos (A e B) da haste estão ligados relógios, e que estes relógios são síncronos dos relógios do sistema em repouso, isto é, dão indicações que estão de acordo, em cada instante, com o «tempo do sistema em repouso» nos locais em que se encontram, sendo assim «síncronos no sistema em repouso».

Imaginemos ainda que junto de cada relógio se encontra um observador que o acompanha durante o movimento, e que estes observadores aplicam a ambos os relógios o critério de funcionamento síncrono de dois relógios que foi estabelecido no § 1.

Suponhamos que um raio de luz sai de A no instante t_A*, se reflecte em B no instante t_B e volta a A no instante t'_A. Tendo em vista a constância da velocidade da luz, encontramos:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \quad \text{e} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v},$$

---

* «Instante» significa aqui «valor instantâneo do tempo do sistema em repouso» e também «posição instantânea do ponteiro do relógio móvel que se encontra no local em questão».

onde r_{AB} representa o comprimento da haste móvel medida no sistema em repouso. Os observadores em movimento com a haste móvel verificariam assim que os dois relógios não funcionavam em sincronismo, ao passo que um observador que se encontrasse num sistema em repouso diria que os dois relógios eram síncronos.

Vemos deste modo que não podemos atribuir ao conceito de simultaneidade um significado *absoluto* e que, pelo contrário, dois acontecimentos que são simultâneos quando apreciados num determinado sistema de coordenadas já não podem ser considerados como tal quando apreciados num sistema que se move em relação ao primeiro.

§ 3. *Teoria de transformação das coordenadas e do tempo na passagem de um sistema em repouso para outro que está animado em relação ao primeiro de uma translação uniforme*

Consideremos no espaço «em repouso» dois sistemas de coordenadas, isto é, dois sistemas de três linhas materiais, rígidas, perpendiculares entre si, e tendo a sua origem comum num determinado ponto. Suponhamos que os eixos X dos dois sistemas são coincidentes e que os eixos Y e Z são respectivamente paralelos. Imaginemos cada sistema munido de uma régua rígida e de um certo número de relógios, e admitamos que as duas réguas e todos os relógios dos dois sistemas são entre si rigorosamente idênticos.

Comuniquemos agora à origem de um dos dois sistemas (k) uma velocidade (constante) no sentido do x crescente do outro sistema (K), o qual continua em repouso. Essa velocidade comunicar-se-á também aos eixos de coordenadas, à respectiva régua de medida e aos relógios. A cada instante t do sistema em repouso K corresponde então uma determinada posição dos eixos do sistema móvel, e razões de simetria permitem-nos admitir que o movimento de k se possa efectuar de maneira tal que no instante t («t» significa sempre tempo do sistema em repouso) os eixos do sistema móvel sejam paralelos aos eixos do sistema em repouso.

Imaginemos agora que se fazem medições espaciais, a partir do sistema em repouso K por meio da régua imóvel, e a partir do sistema móvel K por meio da régua que se move com ele, determinando-se assim as coordenadas x, y, z e ξ, η, ζ, respectivamente.

Suponhamos além disso que o tempo t do sistema em repouso se determina com relógios que nele se encontram imobilizados, mediante o emprego de sinais luminosos, do modo indicado no § 1, fazendo-se essa determinação para todos os pontos onde estão colocados relógios; e que, do mesmo modo, o tempo τ do sistema em movimento se determina, para todos os pontos deste sistema em que há relógios imóveis em relação a ele, aplicando o mencionado método do § 1, de sinais luminosos trocados entre os pontos em que estão situados os relógios.

A cada sistema de valores x, y, z, t que determina completamente o local e o instante de um acontecimento no sistema em repouso corresponde um sistema de valores ξ, η, ζ, τ que determinam esse acontecimento em relação ao sistema k. Põe-se agora o problema de encontrar o sistema das equações que ligam entre si estas grandezas.

Antes de mais, torna-se evidente que essas equações devem ser *lineares*, por causa das propriedades de homogeneidade que atribuímos ao espaço e ao tempo.

Se tomarmos $x' = x - vt$, é claro que para um ponto imóvel no sistema k vem um sistema de valores x', y, z que não depende do tempo.

Vamos calcular primeiro τ como função de x', y, z e t. Para isso temos que exprimir em equações que τ não é mais que a expressão global das indicações dadas pelos relógios que se encontram em repouso no sistema k, e que foram sincronizados segundo a regra dada no parágrafo 1.

Suponhamos que no instante τ_0 é emitido pela origem das coordenadas do sistema k um raio de luz, o qual percorre o eixo X em direcção a x', se reflecte nesse ponto no instante τ_1 e regressa à origem das coordenadas, onde chega no instante τ_2.

Deve então ter-se:

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$$

ou, inserido os argumentos da função τ, e aplicando o princípio da constância da velocidade da luz no sistema em repouso:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right] =$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right)$$

donde, tomando x' infinitamente pequeno:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t},$$

ou

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0.$$

É de notar que, em vez da origem das coordenadas, poderíamos ter tomado qualquer outro ponto para ponto de partida do raio de luz, e por isso a equação que acabamos de obter é válida para todos os valores de x', y, z.

Um raciocínio análogo aplicado aos eixos Y e Z dá-nos, se tivermos em conta que a luz, observada no sistema em repouso, se propaga sempre, ao longo destes eixos, com a velocidade $\sqrt{V^2 - v^2}$:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Destas equações resulta, visto ser τ uma função *linear*:

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right),$$

onde a é uma função $\varphi(v)$, por enquanto desconhecida, e onde se supõe, por brevidade, que, no ponto origem de k é $t = 0$ para $\tau = 0$.

Com o auxílio deste resultado é fácil calcular as grandezas ξ, η, ζ, exprimindo por meio de equações que o valor obtido para a velocidade de propagação da luz continua igual a V quando as medições se fazem no sistema em movimento (o que é exigido pelo princípio da constância da velocidade da luz em combinação com o princípio da relatividade). Para um raio de luz emitido no instante $\tau = 0$ no sentido de ξ crescente, tem-se

$$\xi = V\tau, \quad \text{ou} \quad \xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right).$$

Ora, como o raio de luz em relação ao ponto origem de k se move com a velocidade $V - v$, medida no sistema em repouso, tem-se:

$$\frac{x'}{V - v} = t.$$

Introduzindo este valor de t na equação para ξ, vem:

$$\xi = a \frac{V^2}{V^2 - v^2} x'.$$

De modo análogo, considerando raios de luz que se movam ao longo dos outros dois eixos, encontramos:

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2} x'\right),$$

sendo $$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t; \quad x' = 0;$$

e por isso

$$\eta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} y \quad \text{e} \quad \zeta = a \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}} z.$$

Substituindo x' pelo seu valor obteremos:

$$\tau = \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2} x\right),$$
$$\xi = \varphi(v)\beta\,(x - vt),$$
$$\eta = \varphi(v)y,$$
$$\zeta = \varphi(v)z,$$

onde $$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

e onde φ é uma função de v desconhecida por enquanto. Se não se fizer qualquer suposição sobre a posição inicial do sistema móvel e sobre a origem adoptada para a medição de τ, haverá que escrever no segundo membro de cada uma dessas equações uma constante aditiva. Temos agora que demonstrar que todo o raio de luz, medido no sistema em movimento, se propaga com a velocidade V, se, como vimos admitindo, assim suceder no sistema em repouso; pois ainda não fornecemos a prova de que o princípio da constância da velocidade luz é compatível com o princípio da relatividade.

Suponhamos que no instante $t = \tau = 0$, em que as origens das coordenadas dos dois sistemas coincidem, é emitida dessa origem uma onda esférica que se propaga no sistema K com velocidade V.

Se for (x, y, z) um dos pontos que está sendo atingido pela onda ter-se-á

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2.$$

Transformando esta equação por meio das nossas equações de transformação, obtemos depois de um cálculo simples

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2.$$

Assim, a onda considerada também é vista no sistema móvel como uma onda esférica de velocidade de propagação V. Deste modo se prova que os nossos dois princípios fundamentais são compatíveis *.

Nas equações de transformação que desenvolvemos aparece ainda uma função φ de v que é desconhecida e que vamos agora calcular.

Para isso, introduzamos um terceiro sistema de coordenadas K', que efectue em relação ao sistema k um movimento de translação paralelo ao eixo Ξ, de tal maneira que a sua origem de coordenadas se mova sobre o eixo Ξ com a velocidade $-v$. Suponhamos que as origens dos três sis-

* As equações da transformação de Lorentz deduzem-se directamente, com mais simplicidade, a partir da condição de que, por virtude delas, a relação $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - V^2 \tau^2 = 0$ deve implicar esta outra: $x^2 + y^2 + z^2 - V^2 t^2 = 0$.

temas de coordenadas estavam em coincidência no instante $t = 0$ e consideremos nulo o tempo t' do sistema K' quando $t = x = y = z = 0$. Chamaremos x', y', z' às coordenadas que se medem no sistema K'. Aplicando duas vezes as nossas equações de transformação, obteremos então:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\,\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,t,\\
x' &= \varphi(-v)\,\beta(-v)\left\{\xi + v\tau\right\} &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,x,\\
y' &= \varphi(-v)\,\eta &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,y,\\
z' &= \varphi(-v)\,\zeta &&= \varphi(v)\,\varphi(-v)\,z.
\end{aligned}$$

Como as relações entre x', y', z' e x, y, z não contêm o tempo, segue-se que os sistemas K e K' estão, em relação um ao outro, em repouso, e torna-se claro que a transformação de K sobre K' é a transformação identidade. É pois

$$\varphi(v)\,\varphi(-v) = 1.$$

Vamos agora procurar o significado de $\varphi(v)$. Vamos considerar o segmento do eixo Y limitado pelos pontos $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ e $\xi = 0$, $\eta = l$, $\xi = 0$. Este segmento é uma haste que se move em relação ao sistema K com a velocidade v perpendicular ao seu eixo, e cujos extremos têm em K as coordenadas:

$$x_1 = vt,\quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)},\quad z_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = vt,\quad y_2 = 0,\quad z_2 = 0.$$

O comprimento da haste, medido em K, é assim $l/\varphi(v)$. Isto dá-nos o significado da função φ. Razões de simetria tornam agora evidente que o comprimento, medido no sistema em repouso, de uma determinada haste que se move perpendicularmente ao seu eixo não depende da direcção e sentido do movimento, mas sòmente da velocidade.

Por isso, o comprimento da haste móvel, medido no sistema em repouso, não se modifica se v for substituído por $-v$. Resulta daqui:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}, \quad \text{ou} \quad \varphi(v) = \varphi(-v).$$

Desta relação e da encontrada mais atrás resulta que deve ser $\varphi(v) = 1$, de modo que as equações de transformação encontradas passem a ter a forma

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$
$$\xi = \beta(x - vt),$$
$$\eta = y,$$
$$\zeta = z,$$

sendo

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

§ 4. *Significado físico das equações obtidas, respeitante a corpos rígidos em movimento e a relógios em movimento*

Consideremos uma esfera rígida * de raio R, e suponhamos que ela está em repouso em relação ao sistema móvel k, e que o seu centro coincide com a origem das coordenadas de k. A equação da superfície desta esfera em relação ao sistema imóvel K, relativamente ao qual ela se move com a velocidade v, é

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2.$$

* Isto é, um corpo que, observado em repouso, tem forma esférica.

Expressa em x, y, z no instante $t = 0$ a equação da mesma superfície é:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Vê-se assim que um corpo rígido cuja forma se apresenta esférica quando é medido em estado de repouso passa a ter a forma de um elipsóide de revolução quando estiver em movimento, sendo observado do sistema em repouso. Este elipsoide de revolução tem como eixos

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2},\ R,\ R.$$

Assim, enquanto as dimensões Y e Z da esfera (e também de qualquer corpo rígido de qualquer forma) não se modificam durante o movimento, a dimensão X encontra-se encurtada na razão de $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$, isto é, tanto mais quanto maior for v.

Para $v = V$ todos os objectos móveis — observados do sistema «em repouso» — se reduzem a figuras a duas dimensões. Para velocidades superiores à da luz as nossas conclusões deixam de ter sentido; aliás, veremos nas considerações que se seguem que, na nossa teoria, a velocidade da luz desempenha fìsicamente o papel de uma velocidade infinitamente grande.

É claro que estes resultados são igualmente válidos para corpos em repouso relativamente a sistemas «em repouso», se tais corpos forem observados de sistemas animados de movimento uniforme.

Consideremos agora um daqueles relógios que são próprios para medir o tempo t quando se encontram em repouso em relação ao sistema em repouso, e para medir o tempo τ

quando se encontram em repouso em relação ao sistema móvel. Suponhamo-lo colocado na origem das coordenadas de k, e regulado para indicar o tempo τ. Qual é o ritmo de marcha deste relógio, quando é observado do sistema em repouso?

Entre as grandezas x, t, τ referentes ao local deste relógio existem evidentemente as relações:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \quad \text{e} \quad x = vt.$$

e portanto

$$\tau = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t,$$

donde resulta que a indicação do relógio (observada no sistema em repouso) apresenta um atraso por segundo de $\left(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2}\right)$ segundos, ou — desprezando termos de quarta ordem ou superior — de $\frac{1}{2}(v/V)^2$ segundos.

Daqui deriva a seguinte consequência, que é típica: Consideremos nos pontos A e B do sistema K dois relógios em repouso, e suponhamos que eles funcionam em sincronismo para quem os observe do sistema em repouso. Imaginemos agora que ao relógio de A se imprime um movimento de velocidade v sobre a recta que une os dois pontos, no sentido de B. À chegada deste relógio a B já não haverá sincronismo: o relógio que foi deslocado apresentará em relação ao que permaneceu em A um atraso de $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ (desprezando termos de quarta ordem, ou superior), se representarmos por t a duração do deslocamento.

Vê-se imediatamente que este resultado continua a ser válido se o movimento do relógio de A para B for feito sobre uma linha poligonal arbitrária, estendendo-se mesmo ao caso de os pontos A e B serem coincidentes.

Se admitirmos que o resultado deduzido para uma linha poligonal continua a ser válido para uma curva contínua, chegaremos à seguinte conclusão: Se tivermos em A dois relógios síncronos e depois deslocarmos um deles, fazendo-o descrever com velocidade constante uma curva que vem fechar em A, e se for t o tempo que ele demora nesse percurso, então ele apresentará, quando regressar ao ponto A, um atraso de $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ segundos, em relação ao relógio que não foi deslocado. Daqui se conclui que um «relógio de cabelo» * colocado no equador terrestre deve ter uma marcha mais lenta (ligeirìssimamente) que outro de construção exactamente igual, colocado num dos pólos da Terra, sendo as restantes condições idênticas para os dois relógios.

§ 5. Teorema da adição de velocidades

Suponhamos que um ponto se move no sistema k, o qual, por sua vez, se move com velocidade v ao longo do eixo X do sistema K. Sejam

$$\xi = w_\xi \tau, \qquad \eta = w_\eta \tau, \qquad \zeta = 0,$$

as equações do movimento, nas quais w_ξ e w_η representam constantes.

Procuremos investigar como é que se efectua o movimento do ponto em relação ao sistema K. Introduzindo nas

---

* Em oposição ao «relógio de pêndulo» que, considerado do ponto de vista físico, é um sistema que inclui o globo terrestre e por isso é excluído destas considerações.

equações do movimento do ponto, por meio das equações de transformação desenvolvidas no § 3, as grandezas x, y, z, t obteremos:

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t,$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t,$$

$$z = 0.$$

Assim, segundo a nossa teoria, a lei do paralelogramo de velocidades só é válida em primeira aproximação.

Tomemos

$$U^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi{}^2 + w_\eta{}^2$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{w_y}{w_x}.$$

O ângulo α deve então ser considerado como o ângulo entre as velocidades v e w. Um cálculo simples dá:

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw \cos \alpha) - \left(\frac{v w \operatorname{sen} \alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w \cos \alpha}{V^2}}.$$

É de notar que v e w entram de maneira simétrica na expressão da velocidade resultante. Se w tiver também a direcção do eixo X (eixo Ξ) obteremos

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{v w}{V^2}}.$$

Desta equação resulta que da composição de duas velocidades menores que V resulta sempre uma velocidade menor que V. Se, em particular, pusermos $v = V - \varkappa$, $w = V - \lambda$, onde $\varkappa$ e λ são positivos e mais pequenos que V, virá:

$$U = V \frac{2V - \varkappa - \lambda}{2V - \varkappa - \lambda + \frac{\varkappa\lambda}{V}} < V.$$

Resulta ainda que a velocidade da luz não pode modificar-se por composição com uma «velocidade inferior à da luz». Obtém-se nesse caso:

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V.$$

Também poderíamos obter a fórmula para U, no caso de v e w terem a mesma direcção, por combinação de duas transformações de acordo com o § 3. Se introduzirmos, a par dos sistemas K e k considerados no § 3, um terceiro sistema de coordenadas k', que se move paralelamente a k deslocando a sua origem com velocidade w sobre o eixo Ξ, obteremos entre as grandezas x, y, z, t e as correspondentes grandezas de k', equações que só diferem das encontradas no § 3 em que, no lugar da grandeza «v», contêm a grandeza

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Por aqui se vê que tais transformações paralelas formam — como deve ser — um grupo.

Acabamos assim de estabelecer para a cinemática que corresponde aos nossos dois princípios as proposições de que vamos necessitar. Vamos agora mostrar como é que elas se aplicam à electrodinâmica.

§ 6. *Transformação das equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio. Sobre a natureza das forças electromotrizes que surgem por efeito de movimento num campo magnético*

Se admitirmos que as equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio são válidas para o sistema em repouso, teremos que:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

onde (X, Y, Z) representa o vector da força eléctrica e (L, M, N) o da força magnética.

Apliquemos a estas equações a transformação desenvolvida no § 3 referindo os fenómenos electromagnéticos ao sistema de coordenadas animado da velocidade v, que nesse parágrafo foi introduzido. Obteremos então as equações:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta}-\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y-\frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial \beta\left(N-\frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z+\frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau}=\frac{\partial \beta\left(M+\frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},$$

com
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Ora o princípio da relatividade exige que as equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio sejam válidas para o sistema k se o forem para o sistema K; isto é, exigem a validade das seguintes equações entre os vectores força eléctrica (X', Y', Z') e força magnética (L', M', N') do sistema móvel k, definidos nesse sistema pelos seus efeitos ponderomotrizes sobre massas eléctricas e massas magnéticas:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.$$

Ora é evidente que os dois sistemas de equações encontrados para o sistema k devem exprimir exactamente a mesma coisa, visto que ambos são equivalentes às equações de Maxwell-Hertz para o sistema K. E como, além disso, as equações dos dois sistemas só diferem nos símbolos que representam os vectores, é de concluir que as funções que nos dois sistemas de equações entram em lugares correspondentes devem coincidir, à parte um factor $\psi(v)$, que é o mesmo para todas as funções de um dos sistemas, e que é independente de ξ, η, ζ e τ mas que pode depender de v. São pois válidas as seguintes relações:

$$X' = \psi(v)X, \qquad L' = \psi(v)L,$$
$$Y' = \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad M' = \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$
$$Z' = \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \qquad N' = \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

Se agora se efectuar a inversão deste sistema sucessivamente por dois processos — primeiro, resolvendo as equações agora obtidas; depois, aplicando às mesmas equações a transformação inversa da que se aplicou antes (isto é, a transformação de k em K), a qual é caracterizada pela velocidade — v, — conclui-se, tendo em vista que os dois sistemas de equações obtidos devem ser idênticos, que

$$\psi(v) \cdot \psi(-v) = 1.$$

Por outro lado, por razões de simetria *

$$\psi(v) = \psi(-v);$$

e portanto $$\psi(v) = 1,$$

tomando então as nossas equações a forma:

$$X' = X, \qquad L' = L,$$
$$Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \qquad M' = \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right),$$
$$Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right), \qquad N' = \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right).$$

---

* Se, por exemplo, $X = Y = Z = L = M = 0$ e $N \neq 0$ é claro, por razões de simetria, que se v mudar de sinal sem mudar de valor numérico, também o mesmo deve acontecer a Y'.

Para interpretarmos estas equações, consideremos uma carga eléctrica pontual que apresente o valor «um» quando é medida no sistema em repouso, isto é, uma carga que, estando imóvel no sistema em repouso, exerce a força de 1 dine sobre uma carga igual, colocada à distância de 1 cm dela. De acordo com o princípio da relatividade, a mesma carga eléctrica apresentará também o valor «um» se for medida no sistema em movimento. Estando a carga em repouso em relação ao sistema imóvel, o vector (X, Y, Z) é, por definição, igual à força que actua sobre ela; mas, estando a carga em repouso relativamente ao sistema que se move (pelo menos no instante que se está considerando), então a força que actua sobre ela será igual, se for medida neste sistema móvel, ao vector (X', Y', Z'). Consequentemente, as primeiras três equações acima escritas podem ser traduzidas em enunciados das duas seguintes maneiras:

1. Se um pólo eléctrico unidade, puntiforme, se move num campo electromagnético, exercer-se-á sobre ele, além da força eléctrica, uma força «electromotriz» que, desprezando termos em que entram como factores potências de v/V de grau igual ou superior a 2, é igual ao quociente pela velocidade da luz do produto vectorial formado com a velocidade do pólo unidade e com a força magnética. (Antigo enunciado.)

2. Se um pólo eléctrico puntiforme unidade se move num campo electromagnético, exerce-se sobre ele uma força idêntica à força eléctrica que se obtém no ponto ocupado pelo pólo quando se submete o campo a uma transformação de coordenadas, a fim de o referir a um sistema de eixos que esteja imóvel em relação ao referido pólo. (Novo enunciado.)

Um enunciado análogo é válido para a força «magnetomotriz».

Como se vê, na teoria que se desenvolveu, a força electromotriz apenas desempenha o papel de conceito auxiliar, que deve a sua introdução ao facto de as forças eléctricas e magnéticas não terem existência independente do estado de movimento do sistema de coordenadas.

É também claro que a assimetria mencionada na introdução, que surge quando se consideram as correntes eléctricas provocadas pelo movimento relativo de um íman e de um condutor, desaparece agora. E também perdem a sua razão de ser as questões referentes às localizações das forças electromotrizes da electrodinâmica (máquinas unipolares).

§ 7. *Teoria do princípio de Doppler e da aberração*

Suponhamos que se encontra no sistema K, muito longe da origem das coordenadas, uma fonte de ondas electrodinâmicas que, numa parte do espaço que inclui a origem das coordenadas, são representadas, com suficiente aproximação, pelas equações:

$$\begin{aligned} X &= X_0 \operatorname{sen} \Phi, & L &= L_0 \operatorname{sen} \Phi, \\ Y &= Y_0 \operatorname{sen} \Phi, & M &= M_0 \operatorname{sen} \Phi, & \Phi &= \omega\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right) \\ Z &= Z_0 \operatorname{sen} \Phi, & N &= N_0 \operatorname{sen} \Phi, \end{aligned}$$

onde (X_0, Y_0, Z_0) e (L_0, M_0, N_0) são os vectores que definem a amplitude do trem de ondas, e a, b, c são os co-senos directores das normais às ondas. Propomo-nos saber qual é a natureza destas ondas, quando são examinadas por um observador em repouso em relação ao sistema móvel.

Por aplicação das equações de transformação das forças eléctricas e magnéticas encontradas no § 6 e das equações de transformação das coordenadas e do tempo encontradas no § 3, obtemos directamente:

$$X' = X_0 \operatorname{sen} \Phi', \qquad L' = L_0 \operatorname{sen} \Phi',$$
$$Y' = \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V} N_0\right) \operatorname{sen} \Phi', \qquad M' = \beta\left(M_0 + \frac{v}{V} Z_0\right) \operatorname{sen} \Phi',$$
$$Z' = \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V} M_0\right) \operatorname{sen} \Phi', \qquad N' = \beta\left(N_0 - \frac{v}{V} Y_0\right) \operatorname{sen} \Phi'.$$
$$\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right),$$

onde
$$\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right),$$

$$a' = \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}},$$

$$b' = \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)},$$

$$c' = \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}.$$

Da equação para ω' deduz-se o seguinte: Se um observador se mover com velocidade v em relação a uma fonte luminosa de frequência ν, infinitamente distante, e se o movimento for feito de modo que a recta «fonte de luz-observador» faça um ângulo φ com a velocidade do observador em relação a um sistema de coordenadas imóvel relativamente à fonte luminosa, então a frequência luminosa percebida pelo observador, ν', é dada pela equação:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Isto é o princípio de Doppler para velocidades arbitrárias. Para $\varphi = 0$, a equação toma a forma sugestiva:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}.$$

Vê-se assim que — contràriamente à concepção habitual — para $v = -V$ é $\nu' = \infty$ [1].

Se chamarmos φ' ao ângulo entre a normal à onda (direcção de radiação) no sistema móvel e a recta «fonte luminosa-observador» a equação para a' tomará a forma:

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi} \quad [2].$$

Esta equação exprime a lei da aberração na sua forma mais geral. Se for $\varphi = \pi/2$, a equação toma a simples forma:

$$\cos \varphi' = -\frac{v}{V} \quad [3].$$

Agora temos que procurar ainda a amplitude das ondas tal como ela se apresenta no sistema em movimento.

Designemos por A e A' as amplitudes da força eléctrica ou magnética medidas respectivamente no sistema em repouso ou no sistema em movimento. Obteremos então:

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V} \cos \varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

equação que, para $\varphi = 0$, conduz à equação mais simples:

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}.$$

Das equações deduzidas resulta que, para um observador que se aproxime de uma fonte de luz com a velocidade V, essa fonte deve apresentar intensidade infinita.

§ 8. *Transformação da energia dos raios de luz. Teoria da pressão de radiação exercida sobre reflectores perfeitos*

Como a energia luminosa por unidade de volume é igual a $A^2/8\pi$ teremos que considerar, de acordo com o princípio da relatividade, $A'^2/8\pi$ como energia luminosa no sistema em movimento. Então A'^2/A^2 seria a razão da energia «medida em movimento» para a energia «medida em repouso» de um dado complexo luminoso, se o volume de um complexo luminoso fosse o mesmo quando medido em K e em k.

Mas não acontece assim. Se a, b, c forem os co-senos directores das normais às ondas luminosas no sistema em repouso, nenhuma energia atravessará os elementos da superfície esférica

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2,$$

a qual se move com a velocidade da luz. Podemos pois dizer que esta superfície encerra permanentemente o mesmo complexo luminoso.

Vamos procurar saber qual é a quantidade de energia contida dentro desta superfície quando ela é observada do sistema k, isto é, qual a energia do complexo luminoso relativamente ao sistema k.

Ora, quando é observada do sistema móvel, a superfície esférica transforma-se numa superfície elipsoidal, cuja equação é a seguinte no instante $\tau = 0$:

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2.$$

Se chamarmos S ao volume da esfera e S' ao deste elipsoide, teremos depois de um simples cálculo:

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}.$$

Então, se designarmos por E a energia encerrada na superfície considerada quando medida no sistema em repouso, e por E' essa energia quando medida no sistema em movimento, teremos:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi}S'}{\frac{A^2}{8\pi}S} = \frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

fórmula que, para $\varphi = 0$, se simplifica em:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{V}}{1+\frac{v}{V}}}.$$

É digno de nota que tanto a energia como a frequência de um complexo luminoso se alteram segundo a mesma lei com o estado de movimento do observador.

Suponhamos agora que o plano das coordenadas $\xi = 0$ é uma superfície perfeitamente reflectora, sobre a qual se reflectem as ondas planas consideradas no último parágrafo.

Vamos procurar determinar a pressão luminosa exercida sobre a superfície reflectora e também a direcção, frequência e intensidade da luz após a reflexão.

Definamos a luz incidente pelas grandezas A, $\cos\varphi$, ν (referidas ao sistema K). As grandezas correspondentes consideradas no sistema k serão:

$$A' = A \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi},$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Para a luz reflectida obteremos, referindo o fenómeno ao sistema k:

$$A'' = A',$$

$$\cos\varphi'' = -\cos\varphi',$$

$$\nu'' = \nu'.$$

Finalmente, por transformação inversa para passar ao sistema em repouso K, obteremos para a luz reflectida:

$$A''' = A'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''} = - \frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right) \cos \varphi - 2 \frac{v}{V}}{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2},$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2 \frac{v}{V} \cos \varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}.$$

A energia que em cada unidade de tempo cai sobre a superfície do espelho é evidentemente (quando medida no sistema em repouso) $A^2/8\pi \ (V \cos \varphi - v)$. A energia que se afasta, durante unidade de tempo, da superfície do espelho é $A'''^2/8\pi \ (- V \cos \varphi''' + v)$.

A diferença entre estas duas expressões é igual, segundo o princípio da energia, ao trabalho efectuado pela pressão luminosa durante 1 unidade de tempo. Se exprimirmos este trabalho pelo produto $P \,.\, v$, sendo P a pressão luminosa, obteremos:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \frac{\left(\cos \varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

Em primeira aproximação, teremos, em concordância com a experiência e com outras teorias:

$$P = 2 \frac{A^2}{8\pi} \cos^2 \varphi.$$

Com o método que aqui utilizámos podem resolver-se todos os problemas da óptica dos corpos em movimento. O essencial é que a força eléctrica e magnética da luz que sofre a influência de um corpo em movimento seja transformada, para ficar referida a um sistema de coordenadas em repouso relativamente ao corpo. Deste modo, qualquer dos problemas da óptica dos corpos em movimento ficará reduzido a uma série de problemas da óptica dos corpos em repouso.

§ 9. *Transformação das equações de Maxwell-Hertz tendo em conta as correntes de convecção*

Vamos partir das equações:

$$\frac{1}{V}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

onde
$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

representa o produto por 4π da densidade da electricidade, e (u_x, u_y, u_z) representa o vector velocidade da electricidade. Se imaginarmos as massas eléctricas invariàvelmente ligadas a pequenos corpos rígidos (iões, electrões), estas equações serão então o fundamento electromagnético da electrodinâmica e da óptica de Lorentz para corpos em movimento.

Se admitirmos a validade destas equações no sistema K e as transformarmos por meio das equações de transformação dos §§ 3 e 6 para passarmos ao sistema k, obteremos as equações:

$$\frac{1}{V}\left\{u_\xi\rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\eta\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},$$

$$\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} = \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},$$

onde

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi,$$

$$\frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\eta, \quad \rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right)\rho.$$

$$\frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{u_x v}{V^2}\right)} = u_\zeta.$$

Como do teorema de adição de velocidades (§ 5) resulta que o vector (u_ξ, u_η, u_ζ) outra coisa não é senão a velocidade das massas eléctricas medida no sistema *k*, fica assim demonstrado que, uma vez aceites os nossos princípios cinemáticos, se realiza o acordo entre o princípio da relatividade e a base electrodinâmica da teoria de Lorentz sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento.

Seja ainda feita uma breve referência ao facto de se poder deduzir das equações que desenvolvemos a seguinte e importante proposição: se um corpo elèctricamente carregado se move de qualquer modo no espaço, e se a sua carga, durante esse movimento, se mantiver constante para quem a observe dum sistema de coordenadas que acompanhe o movimento do corpo, então ela ficará também constante para quem a observe do sistema em repouso.

§ 10. Dinâmica do electrão (lentamente acelerado)

Suponhamos que num campo electromagnético se move uma partícula puntiforme, dotada de uma carga eléctrica ε (a que daqui por diante passaremos a chamar «electrão»). Acerca da lei do seu movimento limitar-nos-emos a fazer a seguinte suposição: se o electrão estiver em repouso num determinado instante, o seu movimento no intervalo de tempo que se segue será definido pelas equações

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon X$$

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon Y$$

$$\mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon Z,$$

onde x, y, z representam as coordenadas do electrão e μ representa a sua massa, enquanto o movimento for lento.

Passemos agora a supor que num dado instante o electrão já se encontra animado da velocidade v e procuremos a lei do movimento no intervalo de tempo que imediatamente se segue a esse instante.

Sem com isso afectarmos a generalidade dos raciocínios, podemos, e vamos, admitir que o electrão, no instante em que o examinamos, se encontra na origem das coordenadas, e se move com a velocidade v ao longo do eixo x do sistema K. É então evidente que o electrão no instante considerado ($t = 0$) está em repouso em relação a um sistema de coordenadas k animado de movimento de translação ao longo do eixo X, com velocidade constante v.

Da suposição acima feita, em combinação com o princípio da relatividade, resulta claro que o electrão no intervalo de tempo imediatamente seguinte (para pequenos valores de t) se move, quando observado do sistema k, segundo as equações:

$$\mu \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \varepsilon X',$$

$$\mu \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = \varepsilon Y',$$

$$\mu \frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} = \varepsilon Z',$$

onde as letras ξ, η, ζ, τ, X', Y', Z', se referem ao sistema k. Se convencionarmos agora que para $t = x = y = z = 0$ e $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, são válidas as transformações dos §§ 3 e 6, então teremos:

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right),$$

$$\xi = \beta(x - vt), \qquad X' = X,$$

$$\eta = y, \qquad Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right),$$

$$\zeta = z, \qquad Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right).$$

Por meio destas equações transformaremos as anteriores equações de movimento, passando do sistema k para o sistema K. Obteremos:

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^3}X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right). \end{aligned}\right.$$

Procuremos agora, cedendo a concepções habituais, a «massa longitudinal» e a «massa transversal» do electrão em movimento.

Escrevamos as equações (A) na forma

$$\mu\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X = \varepsilon X',$$

$$\mu\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y',$$

$$\mu\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z'$$

e comecemos por notar que $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ são as componentes da força ponderomotriz que actua sobre o electrão, consideradas, claro está, num sistema que nesse instante se move com o electrão, tendo uma velocidade igual à dele. (Esta força podia, por exemplo, ser medida com um dinamómetro de mola, em repouso relativamente ao referido sistema.) Se chamarmos simplesmente a esta força «força actuante sobre o electrão» *, se mantivermos a equação massa $\times$ aceleração = força, e se, além disso, estipularmos que a aceleração seja medida no sistema em repouso K, obteremos, das equações anteriores:

$$\text{massa longitudinal} = \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3},$$

$$\text{massa transversal} = \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.$$

É claro que se obteriam outros valores para as massas se se empregassem outras definições para a força e para a aceleração.

Isto mostra-nos que se deve proceder com muita prudência na comparação das diferentes teorias do movimento do electrão.

Note-se que estes resultados relativos à massa também são válidos para pontos materiais ponderáveis, porque um ponto material ponderável pode ser convertido num elec-

* A definição aqui dada para a força não é vantajosa, como Planck foi o primeiro a mostrar. Convém antes definir força de tal modo que os princípios da quantidade de movimento e da energia adquiram a forma mais simples possível.

trão (no sentido que damos a esta palavra) desde que lhe adicionemos uma carga eléctrica *arbitràriamente pequena.*

Vamos agora calcular a energia cinética do electrão. Se um electrão se move sobre o eixo X, sob a solicitação de uma força electrostática X, tendo partido, sem velocidade inicial, da origem das coordenadas, é claro que a energia subtraída ao campo electrostático tem o valor $\int \varepsilon\, X dx$. Como o electrão deve ser acelerado lentamente e, por isso, não pode ceder nenhuma energia em forma de radiação, segue-se que a energia subraída ao campo electrostático deve ser igualada à energia do movimento, W, do electrão. Depreende-se daqui, tendo em vista que durante todo o processo do movimento é válida a primeira das equações (A), que

$$W = \int \varepsilon\, X\, d\, x = \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}.$$

W é assim infinitamente grande para $v = V$. Velocidades superiores à luz não têm, pois, como nos nossos anteriores resultados, possibilidade de existir.

Também para massas ponderáveis esta expressão da energia cinética deve ser válida em virtude do argumento acima apresentado.

Vamos agora enumerar as propriedades do movimento do electrão que resultam do sistema de equação (A) e que são acessíveis à experiência.

1. Da segunda equação do sistema (A) deduz-se que uma força eléctrica Y e uma força magnética N têm uma acção deflectora igualmente intensa sobre um electrão que se move com a velocidade v, desde que seja $Y = N.v/V$. Vê-se assim que a determinação da velocidade do electrão a partir da relação entre o poder deflector magnético A_m e o poder deflector eléctrico A_e se torna possível dentro da nossa

teoria, qualquer que essa velocidade seja, desde que se aplique a lei:

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V}.$$

Esta relação pode ser comprovada pela experiência, porque a velocidade do electrão também pode ser medida directamente, por exemplo por meio de campos eléctricos e magnéticos de oscilação rápida.

2. Da dedução feita para a energia cinética do electrão resulta que entre a queda de potencial experimentada por este e a velocidade que ele atinge deve ser válida a relação:

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\}$$

3. Calculemos o raio de curvatura R da trajectória do electrão quando sobre ele actua (como única força deflectora) uma força magnética N perpendicular à sua velocidade. Da segunda das equações (A) resulta:

$$-\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{v}{V} N. \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

ou
$$\mathrm{R} = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} . \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} . \frac{1}{N}.$$

Estas três relações formulam de um modo completo as leis segundo as quais o electrão deve mover-se de acordo com a presente teoria.

Concluindo, tenho a manifestar ao meu amigo e colega M. Besso o meu agradecimento pela sua colaboração nos problemas aqui tratados e pelas suas muitas e valiosas sugestões.

Notas do Tradutor

[1]) No texto alemão figuram, por lapso, em vez destas igualdades, as seguintes: $\nu = -\infty$, $\nu = \infty$.

[2]) No texto alemão figura, no primeiro membro, cos φ em vez de cos φ'.

[3]) No texto alemão não aparece o sinal —.

A INÉRCIA DE UM CORPO SERÁ DEPENDENTE DO SEU CONTEÚDO ENERGÉTICO ?*

Os resultados da investigação anterior levam a uma consequência muito interessante, que aqui vai ser deduzida.

Baseei-me para isso nas equações de Maxwell-Hertz para o espaço vazio, juntamente com a expressão de Maxwell para a energia electromagnética do espaço e, além disso, no princípio seguinte:

As leis segundo as quais os estados dos sistemas físicos se modificam não se alteram se, em vez de um dado sistema de coordenadas de referência, se adoptar outro que se desloque paralelamente ao primeiro, em movimento de translação uniforme (princípio da relatividade).

Apoiado nestas bases ** deduzi, entre outros, o seguinte resultado (loc. cit. § 8):

Seja l a energia possuída por um sistema de ondas planas referido ao sistema de coordenadas (x, y, z); φ o ângulo da direcção dos raios (normal às ondas) com o eixo do x do sistema. Introduzamos um novo sistema de coordenadas (ξ, η, ζ), que, em relação ao sistema (x, y, z), esteja animado de translação paralela uniforme, e cuja origem se desloque ao longo do eixo do x com a velocidade v. Então, a referida

* Extraído de Ann. d. Phys. 17 (1905).

** O princípio utilizado da constância da velocidade da luz está, naturalmente, implícito nas equações de Maxwell.

quantidade de luz — medida no sistema (ξ, η, ζ) — possuirá a energia:

$$l^{*} = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

onde V representa a velocidade da luz. Utilizaremos no que se segue este resultado.

Suponhamos agora que no sistema (x, y, z) se encontra um corpo em repouso cuja energia — considerada no sistema (x, y, z) — é E_0. Seja H_0 a energia do corpo em relação ao sistema (ξ, η, ζ) que, como se disse acima, se move com a velocidade v.

Admitamos que êste corpo emite ondas planas, de energia $L/2$ (medida em relação a $[x, y, z]$) numa direcção que faz o ângulo φ com o eixo do x e emite, ao mesmo tempo, uma quantidade de luz de igual grandeza na direcção oposta, continuando o corpo, entretanto; em repouso em relação ao sistema (x, y, z). O princípio da energia deve ser aplicável a este processo, e isto em relação aos dois sistemas de coordenadas, de acordo com o princípio da relatividade. Se designarmos por E_1 e H_1 a energia do corpo após a emissão de luz, medida respectivamente em relação aos sistemas (x, y, z) e (ξ, η, ζ), obteremos, utilizando a relação acima apresentada:

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2} \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2} \frac{1 + \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right] =$$

$$= H_1 + \frac{L}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Por subtracção destas equações, obtém-se:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

As duas diferenças, de forma $H - E$, que entram nesta expressão têm significados físicos simples. H e E são valores da energia do mesmo corpo, considerados a partir de dois sistemas de coordenadas que entre si têm movimento relativo, encontrando-se o corpo em repouso num dos sistemas (sistema (x, y, z)). É então claro que a diferença $H - E$ só pode diferir da energia cinética do corpo, considerada em relação ao outro sistema (sistema ξ, η, ζ), por uma constante aditiva C, que depende da escolha das constantes aditivas arbitrárias das energias H e E. Podemos, pois, escrever:

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

visto que C não se modifica durante a emissão de luz. Obteremos assim:

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

A energia cinética do corpo em relação a (ξ, η, ζ) diminui em consequência da emissão de luz, e essa diminuição tem um valor independente das qualidades do corpo. A diferença $K_0 - K_1$ depende, além disso, da velocidade, do mesmo modo que a energia cinética do electrão (loc. cit. § 10).

Desprezando quantidades de quarta ordem e ordens superiores, podemos pôr:

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \frac{v^2}{2} .$$

Desta equação resulta imediatamente o seguinte:

Se um corpo perder a energia L em forma de radiação, a sua massa sofre a diminuição L/V^2. É claro que nada importa ser ou não directa a transformação da energia saída do corpo em energia de radiação, de modo que somos assim conduzidos às seguintes conclusões gerais:

A massa de um corpo é uma medida do seu conteúdo energético; se a energia sofrer uma variação igual a L, a sua massa sofrerá, no mesmo sentido, uma variação igual a $L/9.10^{20}$, se a energia for medida em ergs e a massa em gramas.

Não está fora do possível que, em corpos de conteúdo energético altamente variável (por exemplo, os sais de rádio), se venha a encontrar uma prova a que esta teoria se possa sujeitar. Se a teoria corresponder aos factos, então a radiação é um veículo de inércia entre os corpos emissores e os absorventes.

H. MINKOWSKI

ESPAÇO E TEMPO

ESPAÇO E TEMPO *

Meus Senhores: As considerações sobre espaço e tempo que desejo expor-vos brotaram do terreno da física experimental. Aí reside a sua força. A sua tendência é radical. Daqui em diante os conceitos de espaço e de tempo, considerados como autónomos, vão desvanecer-se como sombras e sòmente se reconhecerá existência independente a uma espécie de união entre os dois.

I

Para começar, desejo explicar como é que, por meio de considerações puramente matemáticas, e partindo da mecânica actualmente aceite, se pode chegar a novas ideias sobre o espaço e o tempo.

As equações da mecânica de Newton apresentam uma dupla invariância. Devem conservar a sua forma, em primeiro lugar, quando se imprime ao sistema de coordenadas espaciais adoptado uma *mudança de posição* arbitrária; em segundo lugar, quando há mudança desse sistema pelo facto de ele estar em movimento, designadamente quando se lhe comunica uma *translação uniforme* qualquer: não desempe-

* Conferência pronunciada perante o 80.º Congresso dos naturalistas e médicos alemães de Colónia, em 21 de Setembro de 1908.

nhando assim nenhum papel a origem tomada para a medição dos tempos. Que seja tão raro fazer menção conjunta destas duas invariâncias explica-se com o facto de já nos termos habituado a passar por cima dos axiomas da geometria como de verdades evidentes, na altura em que nos sentimos maduros para os axiomas da mecânica. Cada uma delas representa para as equações diferenciais da mecânica um determinado grupo de transformações em si próprias. A existência do primeiro grupo considera-se como uma propriedade fundamental do espaço. Quanto ao segundo, prefere-se ignorá-lo, passando-se sem discussão sobre o facto de a observação de fenómenos físicos não permitir decidir se o espaço, pressuposto em repouso, não se encontra, afinal, em translação uniforme. Aqueles dois grupos levam, assim, ao lado um do outro, vida complètamente independente. O seu carácter tão heterogéneo deve ter desencorajado qualquer tentativa para fazer a sua composição. Mas é precisamente o grupo completo, proveniente dessa composição, e considerado como um todo, que nos dá matéria para meditação.

Vamos procurar apresentar gràficamente a questão. Sejam x, y, z coordenadas rectangulares para o espaço, e t o tempo. Lugares e tempos nunca se apresentam à nossa observação senão unidos entre si. Nunca se observa um lugar sem ser num determinado instante, nem um instante sem ser num determinado lugar. Mas continuarei a respeitar o dogma de que o espaço e o tempo têm significado independente. Chamarei *ponto universo* a um ponto do espaço num determinado instante, isto é um sistema de valores x, y, z, t. A multiplicidade («Mannigfaltigkeit») formada por todos os sistemas de valores imagináveis para x, y, z, t chamarei *UNIVERSO* («Welt»). Poderia, a traço audaz [1]), lançar no quadro quatro eixos de universo. Se o traçado de *um só* eixo, constituído por tantas moléculas em buliçoso movimento vibratório, participante ainda por cima na viagem da Terra através do espaço, implica já uma abstracção tão grande, por que há-de o matemático perturbar-se com a abstracção um pouco maior proveniente de o número de eixos passar a quatro? Para não deixar em parte nenhuma o tédio do vazio, admitiremos que algo perceptível se nos apresenta em todos os locais e em todos os instantes. Para não lhe chamar «matéria» ou «electricidade», utilizarei para este «algo» a palavra «substância».

Dirijamos a nossa atenção para o ponto substancial situado no ponto do universo x, y, z, t e admitamos que temos maneira de reconhecer este ponto substancial em qualquer outro instante. Sejam dx, dy, dz as variações das coordenadas espaciais deste ponto substancial correspondentes ao elemento temporal dt; obteremos então, como imagem, por assim dizer, da vida eterna do ponto substancial, uma curva traçada no universo, uma *linha de universo*, cujos pontos se podem determinar unìvocamente em função do parâmetro t, variável de $-\infty$ a $+\infty$. Todo o universo se apresenta resolúvel em tais linhas de universo e, antecipando-me, direi desde já que, na minha opinião, as leis da física devem encontrar a sua expressão mais perfeita em relações recíprocas entre estas linhas de universo.

Pelos conceitos de espaço e tempo ficam separados na multiplicidade x, y, z a parte correspondente a $t = 0$ e as partes laterais, correspondentes a $t > 0$ e a $t < 0$. Se, por simplicidade, considerarmos fixa a origem de espaços e tempos, então o primeiro grupo da mecânica que mencionámos significa que podemos imprimir aos eixos x, y, z em $t = 0$ uma rotação arbitrária em volta da origem, correspondente às transformações lineares e homogéneas da expressão

$$x^2 + y^2 + z^2$$

em si própria. O segundo grupo, porém, significa que nós, igualmente sem modificar a expressão das leis da mecânica, podemos substituir

$$x, y, z, t \quad \text{por} \quad x - \alpha t,\ y - \beta t,\ z - \gamma t,\ t$$

com valores arbitrários para as constantes α, β, γ. Ao eixo do tempo pode, por consequência, ser dada uma direcção completamente arbitrária orientada para a metade superior ($t > 0$) do universo. Como é que se pode agora conciliar a condição da ortogonalidade espacial com esta completa liberdade do eixo do tempo dirigido para cima?

Para estabelecer essa ligação, tomemos um parâmetro positivo c e consideremos a imagem de

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

É formada por duas folhas, separadas por $t = 0$, segundo a analogia com o hiperbolóide de duas folhas. Consideremos a folha situada na região $t > 0$ e tomemos aquelas transformações lineares e homogéneas de x, y, z, t em quatro novas variáveis x', y', z', t', para as quais a expressão desta folha mantém a sua forma. A estas transformações pertencem, evidentemente, as rotações do espaço em volta da origem das coordenadas. Das restantes, obteremos imediatamente completa compreensão se considerarmos uma para a qual y e z não sofram modificação. Desenhemos (fig. 1) a intersec-

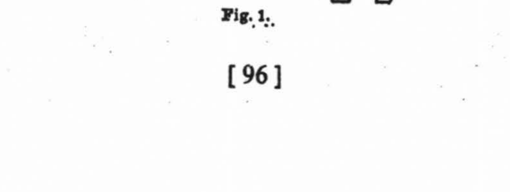


Fig. 1.

ção da folha considerada com o plano dos eixos x e t, ou seja, o ramo superior da hipérbole $c^2t^2 - x^2 = 1$ com as suas assíntotas. Tracemos depois, a partir da origem O, um raio vector arbitrário OA' deste ramo de hipérbole; tracemos também a tangente em A' à hipérbole, até encontrar em B' a assíntota da direita; completemos $OA'B'$ até formar o paralelogramo $OA'B'C'$ e, finalmente, para uso ulterior, prolonguemos $B'C'$ até à intersecção D' com o eixo do x. Se agora tomarmos OC' e OA' como eixos de coordenadas oblíquas, x' e t', com as escalas $OC' = 1$, $OA' = 1/c$, então o ramo de hipérbole considerado terá novamente a expressão $c^2t'^2 - x'^2 = 1$, $t' > 0$ e a passagem de x, y, z, t para x', y, z, t' será uma das transformações em questão. Acrescentamos agora ainda às transformações que caracterizámos os deslocamentos arbitrários da origem de espaços e tempos e constituiremos assim um grupo de transformações que, estando evidentemente ainda na dependência do parâmetro c, designarei por G_c.

Se deixarmos agora c crescer indefinidamente e, portanto, $1/c$ convergir para zero, vê-se na figura que o ramo da hipérbole cada vez se aproxima mais do eixo do x, o ângulo das assíntotas tende para um ângulo raso, e aquela transformação especial converte-se, no limite, numa transformação em que o eixo t' pode ter uma direcção arbitrária para cima, e x' se aproxima cada vez mais de x. É claro, em vista disto, que do grupo G_c se obtém no limite, para $c = \infty$, portanto como grupo G_∞, exactamente o grupo completo que corresponde à mecânica newtoniana. Sendo assim, e visto que G_c é matemàticamente mais inteligível que G_∞, bem poderia um matemático, dando largas à sua imaginação, ter atingido a ideia de que, afinal, os fenómenos da Natureza não possuem de facto invariância em relação ao grupo G_∞ mas sim em relação a um grupo G_c com um determinado valor para c, que é finito, embora *extremamente grande* quando expresso em unidades habituais.

Uma tal intuição teria sido um extraordinário triunfo para a matemática pura. Neste caso, ela limitou-se a manifestar a sua aptidão para a redescoberta 2); mas, graças às felizes antecipações que lhe permitem os seus sentidos apurados para vistas de grande alcance, ela poderá ainda encontrar satisfação na sua capacidade para prontamente apreender as consequências profundas de uma tal transformação da nossa concepção da Natureza.

Indicarei desde já qual é o valor de c que adiante concluiremos dever tomar-se: é o valor da *velocidade de propagação da luz no espaço vazio.*

Definida de outro modo, para evitar referências ao espaço e ao vazio, esta grandeza c é a relação entre a unidade electromagnética e a unidade electrostática da quantidade de electricidade.

A natureza da invariância das leis da Natureza para o respectivo grupo G_c seria agora considerado do seguinte modo:

Da totalidade dos fenómenos da Natureza pode-se inferir por aproximações sucessivas, com exactidão cada vez maior, um sistema de referência x, y, z, t — espaço e tempo — mediante o qual estes fenómenos se apresentem de acordo com leis definidas. Mas este sistema de referência não fica de modo nenhum univocamente determinado pelos fenómenos. *Pode-se imprimir ao sistema de referência qualquer alteração que corresponda às transformações do referido grupo* G_c, *sem que, por esse facto, se modifique a expressão das leis da Natureza.*

Poderemos, por exemplo, em referência à figura que descrevemos, tomar como tempo a coordenada t' mas, em conjugação com isso, teremos então de definir o espaço pela multiplicidade dos três parâmetros x', y, z, e então as leis da Física exprimir-se-ão exactamente da mesma maneira por meio de x', y, z, t' ou por meio de x, y, z, t. Sendo assim, não mais teríamos no universo *o* espaço, mas sim um número infinito de espaços, do mesmo modo que no espaço tridimensional há um número infinito de planos. A geometria tridimensional torna-se então um capítulo da física tetradimensional. E compreende-se agora por que é que eu disse no princípio que espaço e tempo se devem desvanecer como sombras e só um universo único subsistirá.

II

Pergunta-se agora: quais são as circunstâncias que nos impõem esta união de espaço e tempo? Não contradiz ela nunca a experiência? E, finalmente, trará ela vantagem para a descrição dos fenómenos?

Antes de entrar nestas questões, farei uma observação importante.

Se tivermos individualizado de qualquer modo o espaço e o tempo, a um ponto substancial que esteja em repouso corresponderá como linha de universo uma recta paralela ao eixo do t, a um ponto substancial em movimento uniforme uma recta inclinada em relação ao eixo do t, e a um ponto substancial em movimento variado uma linha de universo curva. Se considerarmos para um ponto de universo arbitrário, x, y, z, t, a linha de universo que por ele passa, e verificarmos que aí ela é paralela a um raio vector qualquer OA' da folha de hiperbolóide anteriormente mencionada, poderemos tomar OA' como novo eixo dos tempos e então, com os novos conceitos de espaço e tempo assim formulados, a «substância» apresenta-se em repouso no ponto de universo que foi considerado. Introduziremos agora este axioma fundamental: *A substância que se apresenta num ponto de universo qualquer pode ser sempre reduzida, por meio de uma definição apropriada do espaço e do tempo, ao estado de repouso.*

O axioma significa que em cada ponto do universo a expressão

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

é sempre positiva ou, o que significa o mesmo, que toda a velocidade v se mostra sempre mais pequena que c. Deste modo, c apresentar-se-ia como limite superior para todas as velocidades substanciais, e aqui estaria, precisamente, o significado profundo da grandeza c. Com este outro aspecto, o axioma apresenta-se, à primeira vista, pouco satisfatório. Mas deve notar-se que se vai agora estabelecer uma mecânica modificada, na qual intervém a raiz quadrada daquela combinação diferencial do segundo grau, de modo que os casos de velocidades superiores à da luz desempenham apenas um papel comparável ao que desempenham em geometria as figuras com coordenadas imaginárias.

Ora o *impulso* e verdadeiro móbil *para se admitir o grupo* G_c proveio de que a equação diferencial da propagação da luz no espaço vazio possui aquele grupo G_c*.

Por outro lado, o conceito de corpo rígido só tem significado numa mecânica que admite o grupo G_∞. Se tivermos uma óptica com G_c e houver, por outro lado, corpos rígidos, é fácil ver que *uma* mesma direcção de t seria distinguida pelas duas folhas de hiperbolóide correspondentes a G_c e a G_∞ e isso teria a ulterior consequência de que, usando no laboratório instrumentos ópticos rigidos apropriados,

* Uma aplicação deste facto encontra-se já, essencialmente, em W. Voigt, Göttinger Nachr. 1887, pág. 41.

se deveria verificar alteração nos fenómenos quando se modificasse a orientação deles em relação à direcção do movimento terrestre. Todos os esforços feitos com este objectivo, em especial uma célebre experiência interferencial de Michelson, tiveram no entanto resultado negativo. Para obter uma explicação disto, estabeleceu H. A. Lorentz uma hipótese, cujo êxito reside precisamente na invariância da óptica para o grupo G_c. Segundo Lorentz, cada corpo que possua movimento deve ter sofrido uma contracção na direcção deste movimento, contracção essa que, para a velocidade v, se faz na razão de:

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta hipótese soa ao mais extraordinário fantástico, porque, para ela, a contracção não aparece como qualquer coisa que possa por exemplo resultar da resistência oposta pelo éter, mas antes como algo que misteriosamente, como se caísse do céu, se vem sobrepor às circunstâncias do movimento.

Vou agora mostrar com a nossa figura que a hipótese de Lorentz equivale inteiramente à nova concepção de espaço e tempo, o que a torna muito mais inteligível. Para simplificar, ponhamos de parte as coordenadas y e z e imaginemos um universo a uma só dimensão espacial. Consideremos um corpo em repouso e outro em movimento uniforme e suponhamos que em cada um deles se mantém constante a sua extensão espacial. Então, as imagens dos seus cursos no espaço e tempo serão respectivamente (fig. 1) duas faixas em forma de paralelogramo, uma orientada como o eixo do t, outra inclinada em relação a ele. Se OA' for paralela à segunda destas faixas, poderemos introduzir t' como coordenada temporal e x' como coordenada espacial; e então o segundo corpo apresentar-se-á em repouso e o primeiro em movimento uniforme.

Suponhamos que o primeiro corpo, quando considerado em repouso, tem o comprimento l, isto é, que a secção PP da primeira faixa, sobre o eixo de x, é igual a $l \, . \, OC$ onde OC representa a unidade de medida sobre o eixo do x; e que, por outro lado, o segundo corpo, *quando considerado em repouso*, tem o mesmo comprimento l: o que significa que a secção da segunda faixa medida paralelamente ao eixo do x' é $Q'Q' = l \, . \, OC'$. Os dois corpos podem agora ser tomados como imagens de dois electrões de Lorentz, *iguais*, um em repouso, outro em movimento uniforme.

Se em vez de usarmos o sistema de coordenadas x', t', mantivermos o sistema original, então deverá tomar-se como dimensão do segundo electrão a secção QQ, paralela ao eixo do x, da faixa que lhe corresponde. Ora, como $Q'Q' = l \, . \, OC'$, resulta evidentemente $QQ = 1. \; OD'$. Se tomarmos para a segunda faixa $\frac{dx}{dt} = v$, um cálculo fácil conduz a $OD' = OC. \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, e portanto também a $PP : QQ =$ $= 1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Mas isto é a afirmação da hipótese de Lorentz a respeito da contracção dos electrões em movimento. Se supusermos, por outro lado, que é o segundo electrão que está em repouso, e adoptarmos portanto como sistema de referência x', t', então deveremos tomar como comprimento do primeiro a secção $P'P'$, paralela a OC', da sua faixa, e encontraremos o primeiro electrão contraído em relação ao segundo, exactamente na razão indicada; porque se tem na figura

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP.$$

Lorentz chamou *tempo local* do electrão em movimento uniforme à união t' de x e t, e aplicou uma construção física deste conceito para obter uma melhor compreensão da hipótese da contracção. No entanto, é a Einstein que se deve ter claramente reconhecido que o tempo de um dos electrões é tão bom como o do outro, de modo que é perfeitamente equivalente utilizar t ou t'. Isto fez com que o tempo perdesse a sua posição de conceito determinado de maneira unívoca pelos fenómenos. Quanto ao conceito de espaço, nem Einstein nem Lorentz o atacaram, talvez por ser possível interpretar a transformação especial acima referida, na qual o plano x, t coincide com o plano x' t', por meio de uma mudança de coordenadas em que o eixo do x mantém a sua posição. Tentar fazer para o conceito de espaço o que se fez para o tempo poderá ser considerado mera e temerária aventura matemática. No entanto, este passo parece-me indispensável para a verdadeira compreensão do grupo G_c e, depois de ele ter sido dado, a designação *Postulado da Relatividade* parece-me demasiado frouxa para o que é exigido por uma invariância com o grupo G_c. Como o conteúdo do postulado consiste na afirmação de que só um universo quadridimensional, formado de espaço e tempo, é revelado pelos fenómenos, ficando-nos porém uma certa liberdade para o projectarmos no espaço e no tempo, eu preferiria para esta proposição o nome de *Postulado do Universo Absoluto* (ou, abreviadamente, o de Postulado do Universo).

III

Com o Postulado do Universo, torna-se possível um tratamento equivalente das quatro coordenadas x, y, z, t. Com isso ganham em inteligibilidade, como agora vou mostrar, as formas apresentadas pelas leis da física. Em particular o conceito de *aceleração* adquire uma forma nìtidamente destacada.

Utilizarei uma exposição geométrica, que ocorre naturalmente, se abstrairmos tàcitamente de z no terno x, y, z. Tomarei como origem do espaço-tempo um ponto arbitrário O do Universo. O *cone*

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

cujo vértice é O (fig. 2) compreende duas partes, uma com valores $t < 0$, outra com valores $t > 0$. Diremos que a primeira, o *cone anterior a O*, é formada por todos os pontos

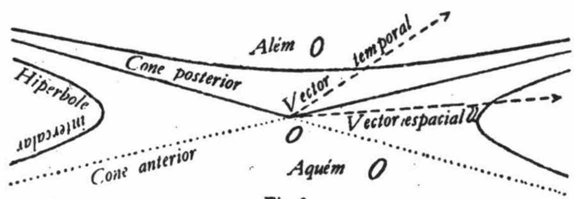


Fig. 2

do Universo que «*enviam luz para O*»; a segunda, *o cone posterior a O*, por todos os pontos do Universo que «recebem luz de O». A região encerrada pelo cone anterior poderá chamar-se o «aquém O» (*diesseits von 0*), e a encerrada pelo cone posterior o «além O» (*jenseits von 0*). No «além O» «fica a folha de hiperbolóide já considerada

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \; t > 0.$$

A região *entre os cones* será preenchida pelas figuras hiperboloidiformes de 1 folha

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2$$

correspondentes a todos os valores constantes e positivos de k^2. São importantes para nós as hipérboles de centro em O traçadas sobre as referidas figuras hiperboliodiformes. Os ramos isolados destas hipérboles poderão chamar-se abreviadamente *hipérboles intercalares de centro O*. Um ramo desses, tomado como linha de universo de um ponto substancial, representaria um movimento cuja velocidade tende assintòticamente para a velocidade da luz c para $t = -\infty$ e $t = +\infty$.

Se, por analogia com o conceito de vector no espaço, chamarmos agora *vector* a um segmento orientado na multiplicidade de x, y, z, t, teremos que distinguir entre vectores do *género temporal*, cujas direcções vão de O para a folha $+F = 1$, $t > 0$, e vectores do *género espacial* com direcções de O para $-F = 1$. O eixo do tempo pode ser paralelo a qualquer vector da primeira espécie. Qualquer ponto de universo situado entre o cone anterior e o cone posterior de O tanto pode, mediante uma escolha adequada do sistema de referência, ser regulado para ser simultâneo de O, como para estar *adiantado* em relação a O ou atrasado em relação a O. Mas todo o ponto de universo aquém O está necessàriamente sempre adiantado, e todo o ponto além O está necessàriamente sempre atrasado em relação a O. À passagem liminar $c = \infty$ corresponderia um achatamento completo do entalhe cuneiforme entre os cones, transformando-o na multiplicidade plana $t = 0$. Nos diagramas desenhados representou-se intencionalmente este entalhe com larguras diferentes.

Consideremos um vector arbitrário, por exemplo o que une O a x, y, z, t e decomponhamo-lo nas quatro *componentes* x, y, z, t. Se as direcções de dois vectores forem respectivamente a do raio vector OR de O para uma das superfícies $\mp F = 0$ e a de uma tangente RS no ponto R da referida superfície, os vectores dizem-se *normais* entre si. Assim, a condição para que sejam normais dois vectores cujas componentes são x, y, z, t e x_1, y_1, z_1, t_1 é

$$c^2tt_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1 = 0.$$

Para a *medição* de vectores em diferentes direcções, devem fixar-se as *unidades de medida*, atribuindo a um vector do género espaço dirigido de O para $-F=1$ sempre a medida 1, e a um vector do género tempo dirigido de O para $+F=1$, $t>0$ sempre a medida $1/c$.

Se considerarmos agora, passando por um ponto de universo $P(x, y, z, t)$, a linha de universo de um ponto substancial, a medida do vector temporal elementar dx, dy, dz, dt, disposto ao longo da referida linha, será

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}.$$

Ao integral $\int d\tau = \tau$ desta quantidade, tomado sobre a linha de universo a partir de um ponto inicial fixo P_0 até um ponto terminal variável P, chamaremos *tempo próprio* do ponto substancial em P.

Sobre a linha de universo consideremos como funções do tempo próprio todas as componentes x, y, z, t do vector OP; designemos as suas primeiras derivadas em ordem a τ por $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, as suas segundas derivadas em ordem a τ por $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$; e aos vectores correspondentes a estas derivadas, isto é, à derivada do vector OP em ordem a τ, e à derivada desta derivada vectorial em ordem a τ, chamemos respectivamente *vector velocidade em* P e *vector aceleração em* P.

Teremos então

$$c^2\dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = c^2,$$
$$c^2\dot{t}\ddot{t} - \dot{x}\ddot{x} - \dot{y}\ddot{y} - \dot{z}\ddot{z} = 0,$$

isto é, o vector velocidade é o vector do género tempo de grandeza 1 na direcção da linha de universo em P; o vector aceleração em P é normal ao vector velocidade em P e é portanto sempre um vector do género espaço.

Ora existe, como é fácil de ver, um certo ramo de hipérbole que tem em comum com a linha de universo três pontos infinitamente próximos e tem como assíntotas geratrizes de um «cone anterior» e de um «cone posterior» (fig. 3 adiante).

Chamemos a este ramo de hipérbole *hipérbole de curvatura* em P. Em relação ao ponto M, seu centro, ela é uma hipérbole intercalar. Se ρ for a grandeza do vector MP, *reconhecemos o vector aceleração em* P *como sendo o vector de direcção* MP *e de grandeza* c^2/ρ.

Se $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ forem todos nulos, a hipérbole de curvatura reduz-se a uma recta tangente em P à linha de universo, e dever-se-á tomar $\rho = \infty$.

IV

Para mostrar que a aceitação do grupo G_c para as leis da Física nunca conduz a uma contradição, é indispensável empreender uma revisão de toda a física, baseada na postulação deste grupo. Esta revisão foi já levada a efeito com êxito, numa certa extensão, para questões de termodinâmica e de radiação calorífica *, para fenómenos electromagnéticos e, finalmente, para a mecânica, sob condição de se preservar o conceito de massa **.

Para este último domínio da física deve, antes de mais nada, pôr-se a seguinte questão: se uma força, cujas componentes segundo os eixos espaciais são X, Y, Z, actua num ponto de universo P (x, y, z, t) cujo vector velocidade é $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{t}$, como é que se deve conceber a sua transformação, quando se mudar de modo arbitrário o sistema de referência?

* M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Berliner Ber. 1907, pág. 542 (também Ann. d. Phys. 26 (1908), pág. 1).

** H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Göttinger Nachr. 1908, pág. 53.

Ora existem certas conjecturas comprovadas, referentes à força ponderomotriz no campo electromagnético nos casos em que não oferece dúvida a admissibilidade do grupo G_c, as quais levam à aceitação da simples regra que se segue:

Sempre que se mude de sistema de referência, a força que se considerava no sistema primitivo está relacionada de tal modo com a força que deve ser considerada no novo sistema que, na transformação de uma na outra, permanece invariável o vector de componentes

$$\dot{t}X, \dot{t}Y, \dot{t}Z, \dot{t}T,$$

sendo
$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right)$$

a potência dinâmica, dividida por c^2, *da força no ponto de universo.*

Este vector é sempre perpendicular ao vector velocidade em P.

Chamaremos a um vector desta espécie, correspondente a uma força em P, *vector-força motor* («bewegender Kraftvektor») em P.

Suponhamos agora que a linha de universo que passa pelo ponto P é descrita por um ponto substancial de *massa mecânica* constante m.

Designemos por *vector-impulsão em* P («Impulsvektor») o vector velocidade em P multiplicado por m; e por *vector-força do movimento* («Kraftvektor der Bewegung») em P o vector aceleração em P multiplicado por m. De acordo com estas definições, enuncia-se do seguinte modo a lei a que obedece o movimento de um ponto dotado de massa sob a acção de um dado vector força motor *:

O vector-força do movimento é igual ao vector-força motor.

Esta asserção condensa quatro equações para as componentes segundo os quatro eixos, podendo a quarta ser con-

* H. Minkowski, loc. cit., pág. 107. Cf. também M. Planck, Verh. d. Physik. Ges. 4 (1906), pág. 136.

siderada consequência das primeiras três, visto os dois vectores anteriormente mencionados serem ambos «a priori» perpendiculares ao vector velocidade.

Em virtude do significado acima dado a T, a quarta equação exprime indubitàvelmente a lei da energia. Daqui resulta que se deve tomar como *energia cinética* do ponto dotado de massa o produto por c^2 da componente do vector impulsão segundo o eixo do t.

A expressão correspondente é

$$m c^2 \frac{dt}{d\tau} = m c^2 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

a qual, suprimida a constante aditiva mc^2, é a expressão $\frac{1}{2} mv^2$ da mecânica newtoniana até quantidades da ordem $1/c^2$. Fica com isto patenteada de maneira flagrante a *dependência em que a energia se encontra do sistema de referência*. Como, porém, o eixo do t pode ser tomado na direcção de qualquer vector do género temporal, segue-se por outro lado que a lei da energia, estruturada para todos os sistemas de referência possíveis, contém já todo o sistema das equações do movimento. Este facto conserva o seu significado quando, do modo já discutido, se fizer a passagem ao limite correspondente a $c = \infty$, tendo assim importância para a construção axiomática da mecânica newtoniana. Sob este ponto de vista já o mesmo facto foi considerado por I. R. Schütz *.

Pode-se estabelecer «a priori» a relação da unidade de comprimento para a unidade de tempo, de tal forma que o limite natural das velocidades se torne $c = 1$. Se, feito isso, tomarmos em vez da variável t a variável $s = \sqrt{-1} \cdot t$, a expressão diferencial quadrática de $d\tau^2$ toma a forma

$$d\tau^2 = - dx^2 - dy^2 - dz^2 - ds^2,$$

* I. R. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie, Göttinger Nachr. 1897, pág. 110.

que é perfeitamente simétrica em x, y, z, s, transmitindo-se esta simetria a todas as leis que não contradigam o postulado do universo. Deste modo, a essência deste postulado, prenhe de consequências matemáticas, pode enroupar-se na fórmula mística:

$$3.10^5 \text{ km} = \sqrt{-1} \text{ seg.}$$

V

As vantagens trazidas pelo postulado do universo não podem talvez em nenhum exemplo documentar-se de maneira mais sugestiva do que nas acções emanadas, segundo a teoria de Maxwell-Lorentz, de uma *carga eléctrica pontual animada de um movimento arbitrário.* Consideremos a linha de universo de um tal electrão puntiforme de carga e, e introduzamos sobre ela o tempo próprio τ a partir de um ponto inicial qualquer.

Fig. 3

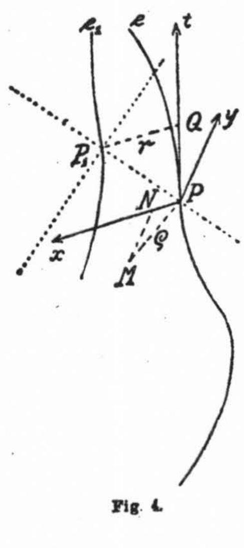


Fig. 4

Para termos o campo criado pelo electrão num ponto de universo arbitrário P_1, construamos o cone anterior relativo a P_1 (fig. 4). Este cone encontra a linha de universo ilimitada do electrão, visto que as direcções desta são em todos os seus pontos as de vectores do género temporal; e esse encontro dá-se evidentemente em um só ponto P. Tracemos a tangente em P à linha de universo e tiremos de P_1 a normal P_1Q a esta tangente. Seja r a medida de P_1Q. A medida de PQ deve então ser, de acordo com a definição de cone anterior, r/c. Ora *o vector de direcção* PQ *e grandeza* e/r *representa, pelas suas componentes segundo os eixos* x, y, z, *o potencial vector multiplicado por* c, *e pela sua componente segundo o eixo* t *o potencial escalar do campo criado por* e, *no ponto* P_1. Nisto se baseiam as leis elementares formuladas por A. Liénard e E. Wiechert *.

Torna-se então claro que na descrição do campo provocado por um electrão a decomposição do campo em força eléctrica e força magnética é uma decomposição relativa ao eixo de tempo que for tomado. A maneira mais clara de compreender esta descrição simultânea das duas forças encontra-se numa certa analogia, ainda que incompleta, que ela tem com o torsor da mecânica.

Ocupar-me-ei agora da *acção ponderomotriz exercida por uma carga pontual, animada de um movimento qualquer, sobre outra carga pontual, igualmente animada de um movimento arbitrário.*

Suponhamos que a linha de universo de um segundo electrão puntiforme de carga e_1 passa pelo ponto do universo P_1. Determinemos P, Q, r como há pouco e determinemos em seguida (fig. 4) o centro M da hipérbole de curvatura em P e, finalmente, a normal MN tirada de M a uma recta que se supõe passar por P paralelamente a QP_1. Estabeleçamos agora, com origem em P, um sistema de referência do seguinte modo: o eixo t na direcção PQ, o eixo x na direcção QP_1, o eixo y na direcção MN; deste

* A. Liénard, Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque, L'Éclairage électrique 16 (1898) págs. 5, 53, 106; E. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. Néerl. (2) 5 (1900), pág. 549.

modo ficará finalmente determinada a direcção do eixo z pela normal aos eixos t, x, y. Seja $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{t}$ o vector aceleração em P e $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{t}_1$ o vector velocidade em P_1. Então, *o vector-força motor exercido em* P_1 *pelo primeiro electrão em movimento arbitrário*, e, *sobre o segundo electrão em movimento arbitrário*, e_1, *terá a expressão*

$$-ee_1\left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c}\right)\mathfrak{K},$$

na qual para as componentes $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{K}_y, \mathfrak{K}_z, \mathfrak{K}_t$ *do vector* $\mathfrak{K}$ *se verificam as três relações:*

$$c\mathfrak{K}_t - \mathfrak{K}_x = \frac{1}{r^2}, \qquad \mathfrak{K}_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 r}, \qquad \mathfrak{K}_z = 0$$

e, como quarta condição, este vector $\mathfrak{K}$ *é normal ao vector velocidade em* P_1, *sendo sòmente através desta condição que depende do referido vector velocidade.*

Se compararmos esta proposição com prévias formulações * da referida lei elementar respeitante à acção ponderomotriz de duas cargas puntiformes, não podemos deixar de reconhecer que as relações aqui consideradas só nas quatro dimensões revelam a sua essência íntima com inteira simplicidade, ao passo que só se manifestam através de uma emaranhada projecção quando impomos «a priori» o espaço a três dimensões.

As perturbantes desarmonias que se encontram entre a mecânica de Newton e a electrodinâmica moderna desaparecem da mecânica que foi reformada por forma a ficar

---

* K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903, pág. 132; H. A. Lorentz, Enzykl. d. math. Wissensch. V, Art. 14, pág. 199.

de acordo com o postulado do universo. Farei ainda breve referência à posição da lei newtoniana da atracção em relação a este postulado. Admitirei que, enquanto dois pontos dotados de massa, m e m_1, descrevem as suas linhas de universo, exercer-se-á de m sobre m_1 um vector-força motor que obedece exactamente à lei cuja expressão acabámos de dar para os electrões, com a única diferença de que se deve agora substituir nela $-ee_1$ por $+mm_1$. Consideremos em particular o caso de ser constantemente nulo o vector aceleração de m, o que nos permite introduzir então t por forma que m se apresente em repouso, ficando em movimento apenas m_1, sob o efeito do vector-força motor procedente de m. Se agora modificarmos este vector, na forma que lhe foi dada, introduzindo-lhe o factor $\dot{t}^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, que até à ordem $1/c^2$ se pode tomar igual a 1, prova-se * que para as posições x_1, y_1, z_1, de m_1 e suas variações no tempo se reencontram exactamente as leis de Kepler, sòmente com a alteração de que, em vez dos tempos t_1, se devem introduzir os tempos próprios τ_1 de m_1.

Desta simples observação resulta que a lei de atracção proposta ligada à nova mecânica não se presta menos para explicar as observações astronómicas que a lei da atracção de Newton ligada à mecânica newtoniana.

Também as equações fundamentais que regem os fenómenos electromagnéticos nos corpos ponderáveis se conciliam perfeitamente com o postulado do Universo. E, como noutro lugar hei-de mostrar, até mesmo a dedução dessas equações feita a partir das representações da teoria electrónica, tal como foi ensinada por Lorentz, pode ser mantida em face do referido postulado.

---

* H. Minkowski, loc. cit., pág. 110.

A validade sem excepção do postulado do universo é, creio eu, o verdadeiro cerne de uma imagem electromagnética do Universo. Entrevista por Lorentz, e posta a descoberto por Einstein, fica agora por completo à luz do dia. Na exploração das suas consequências matemáticas encontrar-se-ão suficientes sugestões para verificações experimentais do postulado. Essas verificações, manifestando uma harmonia pré-estabelecida entre a matemática pura e a física, serão capazes de convencer até mesmo aqueles para quem o abandono de antigos pontos de vista seja antipático ou doloroso.

Notas do Tradutor

1) Traduziu-se assim a expressão (idiomática?) «mit kühner Kreide».

2) Traduziu-se aqui por «aptidão para a redescoberta» a palavra alemã «Treppenwitz».

A. SOMMERFELD

NOTAS

NOTAS

Escusado será dizer que, ao fazer esta reedição da conferência de Minkowski sobre o espaço e o tempo, não se ousou tocar em uma só das palavras do seu texto. Nem mesmo se inseriram nele chamadas de referência às notas que se vão seguir, com receio de o prejudicar. De modo nenhum estas notas são essenciais; outro fim não têm que não seja a remoção de pequenas dificuldades matemáticas de carácter formal, que podem deparar-se no caminho que conduz às grandes ideias de Minkowski. Sobre a literatura relacionada com Minkowski apenas se faz referência ao que directamente se relacione com o objectivo da sua conferência. Ainda hoje se pode objectivamente afirmar que, sob o ponto de vista físico, nada do que Minkowski diz nessa conferência precisa de ser retirado (excepto a nota final sobre a lei da atracção de Newton); o mesmo se não dirá quanto à posição epistemológica a tomar perante a concepção de Minkowski sobre o problema do espaço e tempo mas, a meu ver, essa questão não toca essencialmente o comportamento físico das coisas.

1 — Pág. 100, linha 22. «Por outro lado, o conceito de corpo rígido só tem significado numa mecânica que admita o grupo G_∞.»

Esta afirmação ficou amplamente confirmada numa discussão a que deu lugar, um ano depois da morte de Minkowski, um trabalho do seu discípulo Max Born. Max Born tinha definido (Ann. d. Phys. 30 [1909], pág. 1) como corpo relativamente rígido um corpo que sofre, para qualquer dos seus elementos de volume, a contracção de Lorentz que corresponde à sua velocidade, sucedendo isso ainda mesmo que o movimento seja acelerado. Ehrenfest mostrou (Phys. Zeitschr. 10 [1909], pág. 918) que um tal corpo não pode ser posto em rotação; Herglotz (Ann. d. Phys. 31 [1910], pág. 393) e F. Nöther (Ann. d. Phys. 31 [1910], pág. 919) mostraram que ele apenas dispõe de três graus de liberdade para se mover. Procurou-se depois definir também um corpo relativamente rígido de seis ou nove graus de liberdade. Em oposição a isto, Planck (Phys. Zeitschr 11 [1910], pág. 294) exprimiu o ponto de vista de que a teoria da relatividade só pode operar sobre corpos mais ou menos elásticos e Laue (Phys. Zeitschr. 12 [1911], pág. 48) demonstrou com os métodos de Minkowski relacionados com a fig. 2 desta conferência que, na teoria da relatividade, cada corpo sólido deve possuir um número infinito de graus de liberdade.

Por fim, Herglotz (Ann. d. Phys. 36 [1911], pág. 453) desenvolveu uma teoria da elasticidade relativista, segundo a qual surgem tensões elásticas sempre que o corpo durante o movimento se não comporta como relativamente rígido no sentido de Bohr. O corpo relativamente rígido desempenha assim nesta teoria da elasticidade o mesmo papel que o corpo rígido tradicional na teoria da elasticidade habitual.

2 — Pág. 102, linha 16. «Um cálculo fácil conduz a $OD' = OC\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$». Seja na fig. 1 $\alpha = \sphericalangle A'OA$, $\beta = \sphericalangle B'OA' = \sphericalangle C'OB$, resultando a igualdade destes dois últimos ângulos do facto de as assíntotas terem posição simétrica em relação aos novos eixos de coordenadas (diâmetros conjugados da hipérbole). Como $\alpha + \beta = \pi/4$, então

$$\operatorname{sen} 2\beta = \cos 2\alpha.$$

A lei dos senos dá, no triângulo $OD'C'$:

$$\frac{OD'}{OC'} = \frac{\operatorname{sen} 2\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

ou, visto ser $OC' = OA'$:

$$(1) \qquad OD' = OA'\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = OA'\cos\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2\alpha).$$

Se x, t forem as coordenadas do ponto A' no sistema x, t e portanto $x.OA$ e $ct.OC = ct.OA$ as correspondentes distâncias aos eixos das coordenadas, teremos

$$(2) \quad x \cdot OA = \operatorname{sen}\alpha \cdot OA', \quad ct \cdot OA = \cos\alpha \cdot OA', \quad \frac{x}{ct} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c}.$$

Se introduzirmos estes valores de x e ct na equação da hipérbole, encontraremos:

$$(3) \qquad OA'^2 (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = OA^2, \quad OA' = \frac{OA}{\cos \alpha \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

e assim, em virtude de (1) e (2),

$$(4) \qquad OD' = OA \sqrt{1 - tg^2 \alpha} = OA \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta é a fórmula que se pretende deduzir, visto que $OA = OC$.

Como, além disso, no triângulo rectângulo OCD se tem:

$$OD = \frac{OC}{\cos \alpha} = \frac{OA}{\cos \alpha},$$

a equação (3) pode então escrever-se do seguinte modo:

$$OA' = \frac{OD}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{ou} \quad \frac{OD}{OA'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

o que, conjugado com (4), dá a proporção

$$OD : OA' = OD' : OA$$

a qual, visto ser $OA' = OC'$ e $OA = OC$, é idêntica à utilizada na pág. 102, linha 27

$$OD : OC' = OD' : OC.$$

3 — Pág. 105, linha 11. «Qualquer ponto do universo situado entre o cone anterior e o cone posterior de O tanto pode, mediante uma escolha adequada do sistema de referência, ser regulado para ser simultâneo de O, como para estar adiantado em relação a O ou atrasado em relação a O.»

M. Laue faz derivar desta observação (Phys. Zeitschr. 12 (1911), pág. 48) o teorema de Einstein, segundo o qual, na teoria da relatividade, nenhum acontecimento com ligação causal se pode propagar com velocidade superior à da luz («velocidade do sinal $\leqq c$»). Suponhamos que um acontecimento O dá origem a um outro acontecimento P e que o ponto de universo P está situado na região que separa os dois cones de O. Nesse caso, o efeito transferir-se-ia de O para P com uma velocidade superior à da luz relativamente ao sistema de referência considerado x, t, no qual o efeito P se supõe òbviamente posterior à causa O: $t_P > 0$. Mas agora, de acordo com a observação acima transcrita, pode substituir-se o sistema de referência de tal modo que P venha a ficar anterior a O; isto é, pode-se escolher, de um número infinito de maneiras, um sistema x', t' tal que resulte $t'_P < 0$. Ora isto é inconciliável com a ideia de causalidade: logo, P deve encontrar-se ou na região «além O», ou sobre o cone posterior de O: o que significa que a velocidade de propagação de um sinal eficaz («betätigendes Signal») emitido em O e causador de um segundo acontecimento no ponto de universo P deve ser necessàriamente $\leq c$.

(É claro que, mesmo dentro da teoria da relatividade, é possível definir acontecimentos que se propaguem com velocidade superior à da luz: geomètricamente, por exemplo, isso pode fazer-se de modo muito simples. Tais acontecimentos, porém, não podem nunca ser usados como sinais: não é possível fazê-los entrar, deliberadamente, em acção, nem provocar, por meio deles, a actuação de um «relais» a distância. É também verdade que se encontram meios ópticos em que a «velocidade da luz» é $> c$. Mas então, o que se entende por velocidade da luz é a velocidade de propagação da fase num trem de ondas periódico e infinito: o que não corresponde a nada que possa ser utilizado como sinal. Pelo contrário, uma frente de onda, em todas as circunstâncias, e seja qual for a constituição do meio óptico, propaga-se com a velocidade c; cf., por exemplo, A. Sommerfeld, Festschrift Heinrich Weber (Leipzig, Teubner 1912), pág. 338, ou Annalen d. Physik 44 (1914), pág. 177.)

4 — Pág. 106, linha 10. Como Minkowski me fez uma vez notar, o elemento de tempo próprio $d\tau$ não é uma diferencial total. Se unirmos dois pontos de universo O e P por duas diferentes linhas de universo 1 e 2, será

$$\int_1 d\tau \neq \int_2 d\tau.$$

Se 1 for traçada paralelamente ao eixo do t, a fim de que a transição que lhe corresponde signifique repouso em relação ao referencial adoptado, ter-se-á visìvelmente

$$\int_1 d\tau = t, \qquad \int_2 d\tau < t.$$

Aqui assenta o atraso, revelado por Einstein, do relógio móvel em relação ao relógio fixo. A afirmação de tal atraso baseia-se, como Einstein mostrou, na suposição (indemonstrável) de que o relógio móvel indica de facto o tempo próprio, isto é, dá em cada instante aquele tempo que corresponde ao estado instantâneo de velocidade, considerado como estacionário. Para poder ser comparado com o relógio em repouso no ponto de universo P, o relógio móvel tem de ser submetido a um movimento acelerado (com variações de velocidade ou de direcção).

O atraso do relógio móvel representa assim, não pròpriamente «movimento», mas sim «movimento acelerado». Não há, pois, contradição com o princípio da relatividade.

5 — Pág. 107, linha 4. O conceito de hipérbole de curvatura é construído exactamente segundo o modelo do conceito elementar de círculo de curvatura. A analogia torna-se identidade analítica, se se utilizar, em vez da coordenada temporal real t, a coordenada imaginária $u = ict$, isto é, o produto por c da coordenada s utilizada por Minkowski na pág. 109.

De acordo com o que se diz na pág. 104 uma hipérbole intercalar no plano x, t tem a equação

$$x^2 - c^2t^2 = \rho^2 \quad (\text{com } k = \rho),$$

e portanto, no plano x, u

$$x^2 + u^2 = \rho^2$$

Ela poderá então ser representada pelas seguintes equações paramétricas, nas quais φ representa um ângulo imaginário puro:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad u = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

Pode-se, em vista disto, e tal como eu propus nos Ann. d. Phys. 33, pág. 649, § 8, representar como circular «o movimento hiperbólico» o que permite caracterizar com particular clareza as suas principais propriedades (convecção do campo, aparecimento de uma espécie de força centrífuga). Para o movimento hiperbólico tem-se

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-du^2 - dx^2} = \frac{\rho}{c}\,|\,d\varphi\,|$$

e portanto

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = -ic \operatorname{sen} \varphi, \qquad \dot{u} = \frac{du}{d\tau} = +ic \cos \varphi$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho} \cos \varphi, \qquad \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho} \operatorname{sen} \varphi.$$

A grandeza do vector aceleração no movimento hiperbólico é então c^2/ρ. Como qualquer linha do universo arbitràriamente dada é tocada em três pontos pela hipérbole de curvatura, ela terá em comum com o movimento hiperbólico o vector aceleração, cuja grandeza será, portanto, c^2/ρ como se indicou na pág. 107, linha 8.

O centro M do movimento circular $x^2 + u^2 = \rho^2$ é evidentemente o ponto $x = 0$, $u = 0$, e todos os pontos da hipérbole têm em relação a este ponto a «distância» constante ρ, isto é, o valor constante da grandeza do raio vector. É por isso que ρ é representado pelo segmento MP da fig. 3.

6 — Pág. 108, linha 10. A razão por que a força X, Y, Z, tem de ser multiplicada por $\dot{i}$ para se completar com ela um «vector-força» explica-se da seguinte maneira:

Segundo Minkowski o vector-impulsão (pág. 108, linha 20) define-se por

$$m\dot{x}, \quad m\dot{y}, \quad m\dot{z}, \quad m\dot{t}$$

significando m a «massa mecânica constante», ou, como Minkowski diz ainda mais significativamente noutro lugar, a «massa em repouso». Se nos cingirmos à lei do movimento de Newton (variação do impulso por unidade de tempo igual à força), teremos

$$\frac{d}{dt} m\dot{x} = X, \quad \frac{d}{dt} m\dot{y} = Y, \quad \frac{d}{dt} m\dot{z} = Z.$$

A multiplicação por $\dot{t}$ transforma os primeiros membros em componentes vectoriais no sentido de Minkowski. Sendo assim, $\dot{t}X, \dot{t}Y, \dot{t}Z$ são as três primeiras componentes do «vector força». A quarta componente $\dot{t}T$ resulta unìvocamente da exigência de o vector-força ser perpendicular ao vector-velocidade. As equações de Minkowski para a mecânica do ponto material escrever-se-ão então (para massa de repouso constante):

$$m\ddot{x} = \dot{t}X, \quad m\ddot{y} = \dot{t}Y, \quad m\ddot{z} = \dot{t}Z, \quad m\ddot{t} = \dot{t}T$$

De resto, a premissa da constância da massa em repouso só pode manter-se se o conteúdo energético do corpo não se modificar durante o movimento (isto é, se este se efectuar «adiabática e isocòricamente», como diz Planck).

7 — Págs. 110 e 111. O que é característico das construções aqui dadas é a sua total independência de um sistema de referência especial. Elas dão, como Minkowski anunciava na pág. 95 «relações recíprocas entre linhas de universo» (ou pontos de universo) como «a mais perfeita expressão das leis físicas». Na pág. 111, por exemplo, o potencial electrodinâmico («quadripotencial») só é referido aos eixos coordenados, x, y, z, t depois de ter sido separado (de modo convencional) numa parte escalar e numa parte vectorial, mas essas partes, sob o ponto de vista da relatividade, não têm um significado autónomo e invariante.

Comentando o trabalho de Minkowski, deduzi, a partir das equações de Maxwell, e usando os métodos de Minkowski, uma representação analítica invariante para o quadripotencial e para a acção ponderomotriz entre dois electrões, a qual modifica as citadas construções de Minkowski (Ann. d. Phys. 33 [1910], pág. 649, § 7). Como um tratamento rigoroso desta questão nos levaria muito longe, reenvio o leitor que queira tomar conhecimento daquela representação analítica ou dos correspondentes pormenores para M. Laue (Das Relativitätsprinzip) (Braunschweig [Vieweg] 1913, 4.ª Ed., 1921 § 19). Veja-se também a conferência de Minkowski «Das Relativitätsprinzip», Ann. d. Phys. 47 (1915), pág. 927; neste trabalho dá-se ao quadripotencial a posição dominante da electrodinâmica e, por esse meio, esta assume a sua forma mais simples.

8 — A representação invariante do campo electromagnético como «vector de segunda espécie» (ou sextivector, designação por mim proposta e que parece estar a ter aceitação) é uma parte particularmente importante da apresentação da electrodinâmica de Minkowski. Ao passo que as ideias de Minkowski sobre o vector de primeira espécie («quadrivector») foram em parte antecipadas por Poincaré (Rend. Cir. Mat. Palermo 21 [1906]), a introdução do sextivector no trabalho de Minkowski é original e essencial. Tal como acontece com o sextivector, também o torsor da mecânica (sistema formado por uma força e um binário) depende de 6 parâmetros; e, assim como no campo electromagnético «a decomposição do campo em força eléctrica e magnética é uma decomposição relativa, assim também a separação do torsor em uma força e um binário pode ser feita, como se sabe, de um grande número de maneiras.

9 — Pág. 112, último parágrafo. A forma relativista dada por Minkowski à lei de Newton está incluída na forma mais geral que foi pro-

posta por Poincaré (no trabalho que acabamos de citar), quando é tomada no caso especial — mencionado no texto — de a aceleração ser nula; mas, por outro lado, ela adquire maior alcance que esta última quando se considera a existência de aceleração.

Como se depreende da formulação da lei da gravitação por Minkowski ou por Poincaré, é possível (de muitas maneiras) conciliar a lei de Newton com a teoria da relatividade. Esta lei é, no entanto, concebida como lei pontual, e assim a gravitação é tomada, de certo modo, como uma acção a distância. A «teoria da relatividade geral», que Einstein começou a desenvolver no ano de 1907, aborda o problema da gravitação com maior profundidade. Não só a gravidade se concebe aqui como uma força de campo descrita por equações diferenciais espaço — temporais — o que do ponto de vista actual parece irrefutável — mas, além disso, ela aparece orgânicamente unida ao princípio da relatividade alargado a toda e qualquer transformação, ao passo que nos trabalhos de Minkowski e Poincaré era adaptada mais exteriormente ao postulado da relatividade. Na teoria da relatividade geral, a estrutura espaço-temporal é determinada a partir de, ou juntamente com, a gravitação. O princípio da relatividade é aí — por extensão das ideias de Minkowski — de tal modo formulado, que exige a covariância das grandezas físicas relativamente a todas as transformações pontuais, o que implica que os coeficientes do elemento linear invariante intervenham nas leis físicas.

10 — Pág. 113, último parágrafo. As «Equações fundamentais para os fenómenos electromagnéticos nos corpos em movimento» («Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern») foram desenvolvidas por Minkowski em Göttinger Nachrichten, 1907. Não chegou, porém, a completar a «Dedução destas equações baseada nos princípios da teoria dos electrões» («Ableitung dieser Gleichung auf Grund von Vorstellungen der Elektronentheorie»).

Os seus ensaios a este respeito foram desenvolvidos por Max Born e formam, juntamente com as «Grundgleichungen», o primeiro volume desta série de monografias (Leipzig, 1910).

A. EINSTEIN

SOBRE A INFLUÊNCIA DA GRAVIDADE
NA PROPAGAÇÃO DA LUZ

OS FUNDAMENTOS DA TEORIA
DA RELATIVIDADE GERAL

O PRINCÍPIO DE HAMILTON
E A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

CONSIDERAÇÕES COSMOLÓGICAS SOBRE
A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

OS CAMPOS DE GRAVIDADE
DESEMPENHARÃO UM PAPEL ESSENCIAL
NA CONSTITUIÇÃO DAS PARTÍCULAS
ELEMENTARES DA MATÉRIA ?

SOBRE A INFLUÊNCIA DA GRAVIDADE NA PROPAGAÇÃO DA LUZ*

Já num artigo apresentado há quatro anos eu procurei responder à questão da possível influência da gravidade sobre a propagação da luz**. Volto agora a este tema, porque não me satisfaz a forma por que então tratei o assunto e, mais ainda, porque vejo agora que uma das mais importantes consequências daquelas considerações pode ser submetida à verificação experimental. Refiro-me ao facto de os raios de luz que passam na proximidade do Sol sofrerem no seu campo de gravidade, segundo a teoria que se vai apresentar, um desvio tal, que a distância angular entre o Sol e uma estrela fixa observada na sua proximidade é vista com um aumento aparente de quase 1 segundo de arco.

No decurso destas reflexões surgem ainda outros resultados que se relacionam com a gravitação. Como, porém, uma exposição completa do assunto seria um pouco difícil de seguir, aqui só serão apresentadas algumas considerações muito elementares, para que o leitor possa fàcilmente tomar conhecimento das bases e da linha de pensamento da teoria. As relações que aqui se deduzem são válidas apenas em primeira aproximação, conquanto seja válido o seu fundamento teórico.

---

* Reproduzido de Ann. d. Phys. 35 (1911).

** A. Einstein, Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik 4 (1907)

§ 1. *Hipótese sobre a natureza física do campo gravítico*

Imaginemos num campo de gravidade homogéneo (cuja aceleração designaremos por γ) um sistema de coordenadas em repouso K, de tal modo orientado que as linhas de força do campo fiquem dirigidas no sentido negativo do eixo do z. Imaginemos também que num espaço isento de campos de gravidade se encontra um segundo sistema de coordenadas K' animado de um movimento uniformemente acelerado (de aceleração γ) na direcção do eixo do z e no seu sentido positivo. Para não complicar inùtilmente o raciocínio, dispensaremos por agora a teoria da relatividade e consideraremos os dois sistemas segundo o ponto de vista da cinemática tradicional e o movimento que os anima segundo a perspectiva da mecânica usual.

Os pontos materiais que não estejam sujeitos à influência de outros movem-se, tanto em relação a K como a K', de acordo com as equações:

$$\frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = -\gamma.$$

Em relação ao sistema acelerado K' isto resulta directamente do princípio de Galileu, mas em relação ao sistema K, que está em repouso num campo de gravidade homogéneo, resulta do facto experimental de todos os corpos terem, em tal campo, movimentos idênticos uniformemente acelerados. Esta lei da queda idêntica de todos os corpos no campo da gravidade é uma das mais gerais que a observação da Natureza nos oferece, mas, apesar disso, não lhe foi dado nenhum lugar nos fundamentos da nossa representação do mundo físico.

Chegaremos, porém, a uma interpretação muito satisfatória de tal lei experimental, se admitirmos que os sistemas K e K' se equivalem completamente do ponto de vista físico, isto é, se admitirmos que o sistema K pode, igualmente bem, considerar-se colocado num espaço isento de campo de gravidade; mas então, teremos de o considerar animado de um movimento uniformemente acelerado. Com esta concepção não pode mais falar-se de *aceleração absoluta* do sistema de referência, do mesmo modo que na teoria da relatividade habitual não tem sentido falar-se de *velocidade absoluta* de um sistema *. Aceite a hipótese que acabamos de fazer, a identidade de queda de todos os corpos num campo gravítico torna-se imediatamente inteligível.

Enquanto nos cingirmos aos fenómenos puramente mecânicos abrangidos pelo domínio de validade da mecânica newtoniana, não oferece dúvida a equivalência dos sistemas K e K'; mas essa equivalência só atingirá um significado de maior profundidade se a admitirmos para todos os fenómenos físicos, isto é, se as leis da Natureza referidas a K coincidirem inteiramente com as leis referidas a K'. Com a aceitação disto, teremos adquirido um princípio que, se for realmente verdadeiro, terá um grande valor heurístico, porque nos permitirá, através da consideração teórica dos fenómenos que se passam em relação a um sistema de referência uniformemente acelerado, obter informação acerca do curso dos fenómenos num campo de gravidade homogéneo. Nas páginas seguintes começaremos por mostrar até que ponto é que a nossa hipótese atinge, dentro do ponto de vista da teoria da relatividade habitual, uma considerável plausibilidade.

---

* É claro que não é *qualquer* campo de gravidade que pode substituir-se por um estado de movimento do sistema privado de campo de gravidade, do mesmo modo que não é possível, por meio de uma transformação relativista, reduzir ao repouso todos os pontos de qualquer meio em movimento.

§ 2. *Sobre a ponderabilidade da energia*

A teoria da relatividade estabeleceu que a massa inerte dum corpo cresce com o seu conteúdo energético: se o valor do acréscimo de energia for E, o acréscimo de massa inerte será igual a E/c^2, sendo c a velocidade da luz. Mas corresponderá a este aumento de massa inerte também um aumento na massa gravítica? Se assim não for, a queda dum corpo num mesmo campo de gravidade deverá efectuar-se com acelerações diversas, dependentes do conteúdo energético do corpo. O resultado tão satisfatório da teoria da relatividade, segundo o qual a lei da conservação da massa se funde com a lei da conservação da energia, não se poderia manter, porque então a lei da conservação da massa teria realmente que ser abandonada, na sua forma antiga, para a massa *inerte*, mas teria que ser mantida para a massa gravítica. Ora isto deve considerar-se muito pouco provável.

Por outro lado, a teoria habitual da relatividade não nos fornece nenhum argumento do qual se possa inferir que o peso dum corpo está dependente do seu conteúdo energético. Vamos mostrar, porém, que a nossa hipótese da equivalência dos sistemas K e K' acarreta, como consequência necessária, a ponderabilidade da energia.

Suponhamos que os dois sistemas materiais S_1 e S_2, munidos de instrumentos de medida, se encontram sobre o eixo do z do referencial K, à distância h um do outro *, de tal modo que o potencial gravítico em S_2 excede em $\gamma \cdot h$ o potencial gravítico em S_1. Imaginemos que S_2 emite para S_1 uma certa quantidade de energia E sob a forma de radiação. Admitamos ainda que as quantidades de energia são medidas em S_1 e S_2 com dispositivos que se mostram completamente idênticos quando são levados a *um mesmo* local

* S_1 e S_2 consideram-se infinitamente pequenos em relação a h.

do sistema z e aí comparados. Quanto ao processo por que se faz este transporte de energia em forma de radiação nada estabeleceremos «a priori», dado que ainda não conhecemos a influência do campo de gravidade sobre a radiação e sobre os instrumentos de medida em S_1 e S_2.

De acordo, porém, com o nosso postulado da equivalência de K e K', podemos estabelecer, em vez do sistema K colocado no campo de gravidade homogéneo, um sistema K', que não está sujeito à gravidade, mas está animado de movimento uniformemente acelerado no sentido positivo do eixo do z do sistema K. Os sistemas materiais S_1 e S_2 supor-se-ão então rìgidamente ligados ao eixo do z de K'.

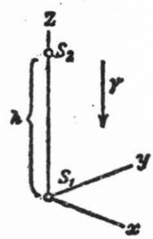


Fig. 1.

O processo da transferência de energia de S_2 para S_1 por radiação será apreciado a partir de um sistema S_0 desprovido de aceleração. Admitamos que é nula a velocidade de K' em relação a K_0 no instante em que é emitida de S_2 para S_1 a energia de radiação E_2. A radiação atingirá S_1 quando tiver decorrido o tempo h/c (em primeira aproximação). Nesse instante, porém, S_1 possui, em relação a K_0, a velocidade $\gamma . h/c = v$. Por esse motivo, e atendendo à teoria da relatividade habitual, a radiação que chega a S_1 não possui a energia E_2, mas sim uma energia maior, E_1, que em primeira aproximação está ligada com E_2 pela equação *:

$$(1) \qquad E_1 = E_2\left(1 + \frac{v}{c}\right) = E_2\left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right).$$

De acordo com a nossa hipótese, a mesma relação é rigorosamente válida se o mesmo processo decorrer no sis-

* A. Einstein, Ann. d. Phys. 17 (1905), 913-914; neste volume, págs. 87-90.

tema K desprovido de aceleração mas dotado de um campo de gravidade. Neste caso, podemos substituir γh pelo potencial Φ do vector de gravitação em S_2 desde que a constante arbitrária de Φ em S_1 se tome igual a zero. Teremos então a equação:

$$E_1 = E_2 + \frac{E_2}{c^2}\Phi. \tag{1a}$$

Esta equação exprime a lei da energia no processo que estamos a considerar. A energia E_1 que chega a S_1 é maior que a energia E_2, medida com os mesmos meios, que foi emitida em S_2, excedendo-a no valor da energia potencial da massa E_2/c^2 no campo de gravidade. Mostra-se assim que a validade do princípio da energia exige que se atribua à energia E, antes de ela ser emitida em S_2, uma energia potencial de gravidade, correspondente à massa (gravítica) E/c^2. A nossa hipótese de equivalência de K a K' remove assim a dificuldade mencionada no princípio deste parágrafo, que a teoria habitual da relatividade tinha deixado sem solução.

O significado deste resultado ressalta com particular clareza quando se considera o seguinte processo cíclico:

1. Emite-se de S_2 para S_1, sob a forma de radiação, a energia E (medida em S_2). Em S_1 será então recebida, de acordo com o resultado que acábamos de obter, a energia $E\ (1 + \gamma h/c^2)$ (medida em S_1).
2. De S_2 para S_1 faz-se descer um corpo W, de massa M, o que tem por efeito fornecer ao exterior o trabalho $M\gamma h$.
3. Transfere-se de S_1 para o corpo W a energia E, enquanto ele se encontra em S_1. Em virtude dessa transferência a massa gravítica de W modifica-se, passando a ter o valor M'.

4. Eleva-se outra vez o corpo W para S_2, o que exige o dispêndio do trabalho $M'\gamma h$.

5. Restitui-se a S_2 a energia E, retirando-a de W.

O único efeito deste processo cíclico consistiu em que S_1 recebeu um acréscimo de energia igual a $E\,(\gamma h/c^2)$ e ainda em se ter transferido para o sistema, em forma de trabalho mecânico, a quantidade de energia

$$M'\gamma h - M\gamma h$$

Deve então ter-se, de acordo com o princípio da energia,

$$E\frac{\gamma h}{c^2} = M'\gamma h - M\gamma h$$

ou

$$M' - M = \frac{E}{c^2} \tag{1b}$$

O acréscimo de massa *gravítica* é assim igual a E/c^2 e, portanto, igual àquele que a teoria da relatividade atribui à massa *inerte*.

Este resultado pode deduzir-se mais directamente ainda, da equivalência dos sistemas K e K', segundo a qual a massa *gravítica* referida a K é exactamente igual à massa *inerte* referida a K'; pelo que a energia deve possuir uma massa *gravítica* que é igual à sua massa *inerte*. Suponhamos então que, no sistema K', se suspende de um dinamómetro uma massa M_0: o dinamómetro acusará, em virtude da inércia de M_0, o peso aparente $M_0\gamma$. Se agora se transferir para M_0 a quantidade de energia E, o dinamómetro, em virtude da inércia da energia, passará a indicar $\left(M_0 + \frac{E}{c^2}\right)\gamma$. De acordo com a nossa hipótese fundamental, exactamente o mesmo deverá acontecer se a experiência for repetida no sistema K, isto é, no campo da gravidade.

§ 3. *Tempo e velocidade da luz no campo da gravidade*

Suponhamos que a radiação emitida de S_2 para S_1 no sistema K', uniformemente acelerado, tem a frequência ν_2, avaliada com um relógio colocado em S_2. Quando essa radiação chegar a S_1 a sua frequência, avaliada com um relógio idêntico ao primeiro mas colocado em S_1, não terá já o valor ν_2 mas sim um valor maior, dado em primeira aproximação por

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 + \frac{\gamma h}{c^2}\right). \tag{2}$$

Com efeito, se voltarmos ao sistema de referência desprovido de aceleração, K_0, em relação ao qual o sistema K' não tem ainda velocidade no instante da emissão da luz, então S_1 terá em relação a K_0, no instante da chegada da radiação a S_1, a velocidade $\gamma(h/c)$, donde resulta directamente, pelo princípio de Doppler, a relação indicada.

Em conformidade com a nossa hipótese de equivalência dos sistemas K e K', esta equação também é válida para o sistema imóvel K, dotado de um campo de gravidade uniforme, caso nele se efectue a transferência de radiação que foi descrita. Resulta daqui que, se um raio de luz for emitido em S_2, sob um determinado potencial gravítico, e apresentar no instante da emissão a frequência ν_2 — determinada com um relógio colocado em S_2 — então ele apresentará, quando chegar a S_1, uma outra frequência ν_1 — medida com um relógio idêntico ao anterior colocado em S_1. Substituamos γh pelo potencial gravítico Φ de S_2 referido a S_1 como origem de potenciais, e admitamos que a relação que foi estabelecida para o campo de gravidade *homogéneo* continua a ser válida para outras formas de campo. Teremos então

$$\nu_1 = \nu_2\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{2a}$$

Este resultado (que, segundo a dedução que fizemos, é válido em primeira aproximação) permite fazer desde já a seguinte aplicação:

Seja ν_0 a frequência de uma fonte elementar de luz, medida com um relógio U situado junto dela. Sendo tal frequência independente do local em que a fonte se encontra colocada com o relógio, imaginêmo-los situados algures sobre a superfície do Sol (onde então se encontrará o nosso S_2). Da luz que é emitida desta superfície há uma parte que atinge a Terra (S_1): façamos a medição da frequência ν dessa parte, usando um relógio U rigorosamente idêntico ao que em cima mencionámos. De acordo com (2a), encontraremos

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

onde Φ designa a diferença (negativa) de potencial gravítico entre a superfície do Sol e a da Terra. Vemos deste modo que o ponto de vista que adoptámos nos leva à previsão de que as riscas espectrais da luz solar apresentam, em relação às correspondentes riscas de fontes luminosas terrestres, um certo desvio para o lado do vermelho, cujo valor relativo é

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{\Phi}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6}.$$

Se fossem conhecidas com exactidão as condições em que se formam as riscas solares, este desvio seria acessível à medição. Mas, como há outras influências (pressão, temperatura) que afectam a posição dos «centros de gravidade» das riscas espectrais, é difícil verificar se existe de facto a influência do potencial gravítico que aqui foi deduzida *.

---

* L. F. Jewell (Journ. de phys. 6 [1897], 84) e em especial Ch. Fabry e H. Boisson (Compt. rend. 148 [1909], 688-690) observaram efectivamente tais desvios de riscas espectrais finas para o extremo vermelho do espectro, e com uma grandeza da ordem daquela que aqui foi calculada. Atribuiram-nos, porém, a um efeito da pressão na camada absorvente.

Numa análise superficial, a equação (2) e a equação correspondente (2a) parecem exprimir um absurdo: como é que num processo permanente de transferência de luz S_2 para S_1 pode chegar a S_1 um número de períodos por segundo diferente daquele que foi emitido em S_1? Mas a resposta é fácil. Nós não podemos considerar ν_2 e ν_1 como frequências tomadas de modo simplista como números de períodos por segundo, visto que ainda não definimos um tempo para o sistema K. ν_2 significa o número de períodos referido à unidade de tempo do relógio U em S_2; e ν_1 o número de períodos referido à unidade de tempo do relógio idêntico, U, situado em S_1. Mas nada nos força a admitir que os dois relógios U, que se encontram submetidos a diferentes potenciais gravíticos, tenham de ser tomados com idênticos ritmos de funcionamento: pelo contrário, o que nós por certo teremos que fazer é que definir o tempo de tal forma que o número de cristas e de vales de onda que se encontram entre S_2 e S_1 fique independente do valor absoluto do tempo, dado o carácter estacionário do processo que estamos a considerar. Se não satisfizéssemos esta condição, chegaríamos a uma definição do tempo que faria intervir explìcitamente esta grandeza nas leis da natureza, o que certamente não seria natural nem conveniente. Sendo assim, os dois relógios que colocámos em S_1 e S_2 não podem dar ambos uma indicação correcta do «tempo»: se medirmos o tempo em S_1 com o relógio U, então *teremos de medir o tempo em* S_2 *com um relógio cujo ritmo se apresenta* $1 + \Phi/c^2$ *vezes mais lento que o de* U, *quando a comparação dos ritmos se faz com os dois relógios colocados no mesmo local*. Com efeito, quando se medir com tal relógio a frequência do raio de luz acima considerado, no instante em que é emitido em S_2, encontrar-se-á

$$\nu_2\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

igual portanto, como mostra (2a), à frequência ν_1 do mesmo raio de luz quando chega a S_1.

Daqui deriva a seguinte consequência, que é de fundamental importância para esta teoria:

Quando medimos a velocidade da luz em diferentes locais do sistema acelerado e isento de campo gravítico K', utilizando nessa medição relógios U de idêntica construção, obteremos sempre o mesmo valor. Em conformidade com a nossa hipótese fundamental, isso deve acontecer também no sistema K; mas aqui, segundo o que acabámos de dizer, teremos de utilizar relógios diferentes para medir o tempo nos locais em que seja diferente o potencial gravítico: assim, para medir o tempo num local em que o potencial gravítico tenha o valor Φ relativamente à origem das coordenadas, deveremos utilizar um relógio que apresente — quando colocado naquela origem — um ritmo $(1 + \Phi/c^2)$ vezes mais lento que o do relógio utilizado para medir o tempo na referida origem. Sendo assim, se designarmos por c_0 a velocidade da luz na origem das coordenadas, então a velocidade da luz, c, num local de potencial gravítico Φ será dada por

$$c = c_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{3}$$

O princípio da constância da velocidade da luz não é, pois, segundo esta teoria, válido na forma que usualmente se põe na base da teoria habitual da relatividade.

§ 4. *Encurvamento dos raios de luz no campo da gravidade*

Da proposição — que acabámos de provar — de que a velocidade da luz do campo da gravidade é função do local deduz-se fàcilmente, por meio do Princípio de Huyghens, que um raio de luz que se propaga através de um campo de gravidade deve sofrer um encurvamento. Com efeito, seja ε uma frente de onda (plano de igual fase) de uma onda luminosa plana no instante t e sejam P_1 e P_2 dois pontos desse plano, situados à distância l um do outro. Estes pontos estão situados sobre o plano do papel, e este foi escolhido por forma a que seja nula a derivada de Φ, e portanto também a de c, segundo a direcção que lhe é normal. Para se obter a posição da frente de onda correspondente ao instante $t + dt$, ou melhor, a da sua intersecção com o plano do papel, basta traçar com centros em P_1 e P_2 circunferências de raios respectivamente iguais a $c_1 dt$ e $c_2 dt$, sendo c_1 e c_2 as velocidades da luz nos pontos P_1 e P_2, e traçar em seguida a tangente a estas circunferências. O ângulo de encurvamento do raio de luz ao longo do percurso cdt é assim

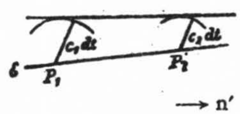


Fig. 2

$$\frac{(c_1 - c_2)\, dt}{l} = -\frac{\partial c}{\partial n'} dt, \qquad 1)$$

se considerarmos positivo o ângulo de encurvamento quando o raio de luz for encurvado para o lado do n' crescente. O ângulo de encurvamento por unidade de comprimento do percurso do raio de luz é então

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial n'} \quad \text{ou, segundo (3), igual a} \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial n'}.$$

Finalmente, para a deflexão α que um raio de luz sofre sobre qualquer percurso (s) para o lado n' teremos a expressão

$$(4) \qquad \alpha = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \Phi}{\partial n'} ds.$$

Chegaríamos ao mesmo resultado se tivéssemos considerado directamente a propagação de um raio de luz no sistema uniformemente acelerado K' e transpuséssemos depois o resultado para o sistema K, e deste para o caso de um campo de gravidade de forma arbitrária.

De acordo com a equação (4), um raio de luz que passa na proximidade de um corpo celeste sofre uma deflexão para o lado em que o potencial gravítico diminui, isto é, para o lado voltado para o corpo celeste, que tem o valor

$$\alpha = \frac{1}{c^2} \int_{\vartheta = -\frac{\pi}{2}}^{\vartheta = +\frac{\pi}{2}} \frac{k M}{r^2} \cos \vartheta \cdot ds = \frac{2 k M}{c^2 \Delta},$$

onde k representa a constante de gravitação, M a massa do corpo celeste, Δ a distância do raio de luz ao centro do corpo celeste.

Um raio de luz que passasse junto do Sol sofreria assim uma deflexão de $4 \cdot 10^{-6} = 0{,}83$ *segundos de arco.* A distância angular entre uma estrela e o centro do Sol apresenta-se acrescida deste valor. Como as estrelas fixas das regiões do céu que são vizinhas do Sol se tornam visíveis quando há eclipses solares, esta consequência da teoria pode confrontar-se com a experiência. Para o planeta Júpiter, o desvio previsto atinge cerca de $^1/_{100}$ do valor que atrás se indicou. Seria de extrema conveniência que os astrónomos se ocupassem da questão que aqui fica esboçada, ainda que ela se apresente insuficientemente fundamentada com os raciocínios anteriores, ou até inteiramente aventurosa. Porque, independentemente de qualquer teoria, levanta-se a questão de saber se os meios de que actualmente se dispõe são capazes de registar uma influência dos campos de gravidade sobre a propagação da luz.

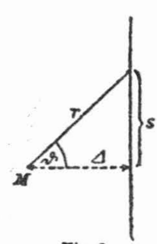


Fig. 8.

Praga, Junho de 1911.

Nota do Tradutor

1) Visto que $c_2 \simeq c_1 + l \left(\frac{\partial c}{\partial n'}\right)_{P_2}$.

No texto alemão, certamente por erro tipográfico, em vez da letra l aparece uma vez 1, e outra vez a letra c. Além disso na fig. 2 não aparece a indicação de n'.

OS FUNDAMENTOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL *

A. Considerações básicas sobre o postulado da relatividade

§ 1. *Notas sobre a teoria da relatividade especial*

A teoria da relatividade especial assenta no seguinte postulado, ao qual satisfaz também a mecânica de Galileu--Newton: se um sistema de coordenadas K for de tal maneira escolhido que as leis da física sejam nele válidas na sua forma mais simples, então as *mesmas* leis serão igualmente válidas em relação a qualquer outro sistema de coordenadas K' que em relação a K esteja animado de um movimento de translação uniforme. Chamaremos a este postulado o «Princípio da Relatividade Especial». Com a palavra «especial» deve entender-se que o princípio se restringe ao caso em que K' tem um *movimento de translação uniforme* em relação a K, não devendo portanto a equivalência de K com K' estender-se ao caso em que haja movimento *não uniforme* de K' em relação K.

Sendo assim, não é o postulado da relatividade que afasta da mecânica clássica a teoria da relatividade, mas tão sòmente o postulado da constância da velocidade da luz no vácuo, do qual, em combinação com o princípio da relatividade

---

* Extraído de Ann. d. Phys. 49 (1916).

especial, deriva, do modo conhecido, a relatividade da simultâneidade, assim como a transformação de Lorentz e as leis, com esta relacionadas, do comportamento em movimento dos corpos rígidos e dos relógios.

A modificação experimentada pela teoria do espaço e tempo através da teoria da relatividade especial é, na verdade, profunda; mas permanece intacto um ponto importante: a teoria da relatividade especial continua a aceitar que os princípios da geometria têm o significado imediato de leis sobre as possíveis posições relativas de corpos rígidos (em repouso) e, de um modo mais geral, que os princípios da cinemática são as leis que regem o comportamento das réguas de medição e dos relógios. A dois pontos materiais considerados sobre um corpo (rígido) corresponde sempre, segundo essas leis, um segmento de comprimento inteiramente determinado, independente da localização e da orientação do corpo, assim como do tempo; e a duas posições dadas de um ponteiro de relógio que esteja em repouso em relação a um sistema de referência (que seja admissível) corresponde sempre um intervalo de tempo de extensão determinada, independente de local e de época. Daqui a pouco se mostrará que a teoria da relatividade geral não pode aderir a uma interpretação física do espaço e tempo tão simples como esta.

§ 2. *Sobre as razões que sugerem a necessidade de uma extensão do postulado da relatividade*

A mecânica clássica, e, não menos que ela, a teoria da relatividade especial, incluem um defeito epistemológico que foi posto em evidência, provàvelmente pela primeira vez, por E. Mach. Vamo-lo apresentar no exemplo seguinte: suponhamos que dois corpos fluidos, da mesma espécie e igual tamanho, flutuam livremente no espaço, a uma distância de tal maneira grande um do outro (e de todas as restantes massas) que as únicas forças de gravitação a considerar são as que entre si exercem as partes componentes de *um mesmo* corpo.

Suporemos invariável a distância entre os corpos, e inexistente qualquer movimento relativo entre as partes de um mesmo corpo; mas admitiremos que cada uma das massas — vista por um observador imóvel em relação à outra — apresenta, em torno da recta que une as duas massas, um movimento de rotação de velocidade angular constante (havendo assim um movimento relativo verificável entre as duas massas). Imaginemos agora que, por meio de réguas (em repouso relativo), se fazem medições sobre as superfícies dos dois corpos (S_1 e S_2), chegando-se à conclusão de que é esférica a superfície de S_1 e elipsoidal de revolução a de S_2.

Pergunta-se agora: por que razão se comportam de modo diverso S_1 e S_2? Uma resposta a esta pergunta só pode ser considerada satisfatória do ponto de vista epistemológico * se aquilo que se apresentar como causa for um *facto experimental observável*: porque a lei da causalidade só pode tomar-se como uma lei do mundo da experiência se ùnicamente *factos observáveis* aparecerem em última análise como causas e efeitos.

A mecânica newtoniana não dá a esta pergunta qualquer resposta satisfatória. Com efeito o que ela diz é o seguinte: as leis da mecânica têm validade num espaço R_1 em relação ao qual o corpo S_1 está em repouso, mas não a têm num

* É claro que uma tal resposta pode ser aceitável do ponto de vista epistemológico e no entanto continuar inaceitável do ponto de vista *físico*, por estar em contradição com outras experiências.

espaço R_2 em relação ao qual está em repouso S_2. O espaço admissível de Galileu que aqui se introduz (assim como o movimento relativo referido a ele) é uma causa *puramente fictícia, nada que seja observável.* Torna-se assim claro que a mecânica de Newton, no caso considerado, não satisfaz de facto, mas apenas de modo aparente, à exigência da causalidade, dado que atribui a uma causa meramente fictícia, R_1, a diferença de comportamento que se observa nos corpos S_1 e S_2.

Uma resposta aceitável para a questão acima formulada só pode ser a seguinte: como o sistema físico formado por S_1 e S_2 não apresenta dentro de si nada que seja possível imaginar como causa da diferença de comportamento de S_1 e S_2, essa causa tem de se encontrar *fora* do sistema. Chega-se assim à ideia de que as leis gerais do movimento de que resultam, como aplicação particular, as formas de S_1 e S_2, devem ser tais que o comportamento mecânico destes corpos fique condicionado de um modo decisivo por massas distantes, não incluídas no sistema considerado. Em tais massas distantes (e nos seus movimentos relativos a respeito dos corpos considerados) é que se devem considerar residindo as causas, em princípio observáveis, da diferença de comportamento dos corpos de que nos estamos a ocupar: são elas que assumem o papel da causa fictícia R_1. De todos os espaços imagináveis R_1, R_2, etc., que se movam em relação uns aos outros de qualquer modo, nenhum deles deve «a priori» ser preferido, se não quisermos fazer ressurgir a objecção epistemológica apresentada. *As leis da física devem ter uma estrutura tal que a sua validade permaneça em sistemas de referência animados de qualquer movimento.* Chegamos deste modo a um alargamento do postulado da relatividade.

Mas, além deste ponderoso argumento epistemológico, há também um facto físico bem conhecido que advoga uma extensão da teoria da relatividade. Seja K um referencial de

Galileu, isto é, um sistema de referência tal que, em relação a ele (e pelo menos no domínio quadridimensional considerado), uma massa suficientemente afastada de outras massas se desloca em movimento rectilíneo e uniforme. Seja K' um segundo sistema de coordenadas que tem, em relação a K, um movimento de translação *uniformemente acelerado*. Teríamos então uma massa suficientemente afastada de outras massas animada de movimento acelerado relativamente a K', sendo a sua aceleração, tanto em grandeza como em direcção, independente da sua composição material e do seu estado físico. Poderá um observador, em repouso relativamente a K', inferir daqui que se encontra sobre um referencial «realmente» acelerado?

A resposta a tal pergunta tem que ser negativa.

Com efeito, o referido comportamento de massas que se movem livremente em relação a K' é susceptível de uma outra interpretação, igualmente boa, que é a seguinte: o referencial K' não está animado de movimento acelerado, mas existe um campo de gravidade no domínio espaço-temporal considerado, e é esse campo que origina o movimento acelerado dos corpos em relação a K'.

O que torna possível esta maneira de conceber as coisas é o facto de a experiência nos ter ensinado que existe um campo de forças (o campo da gravidade) que possui a notável propriedade de comunicar a todos os corpos a mesma aceleração *. O comportamento mecânico dos corpos em relação a K' é o mesmo que a experiência nos revela em relação a sistemas que estamos habituados a considerar como sistemas «em repouso», ou seja, como sistemas «admissíveis»; o que,

* Eötvös demonstrou experimentalmente que o campo da gravidade possui com extrema precisão esta propriedade.

do ponto de vista físico, sugere a aceitação de que os dois sistemas K e K' se podem com igual direito considerar «em repouso», isto é, como sistemas igualmente admissíveis para a descrição física dos fenómenos.

Resulta das considerações feitas que o desenvolvimento da teoria da relatividade geral deve conduzir ao mesmo tempo a uma teoria da gravitação, dado que se pode «produzir» um campo de gravidade por uma simples mudança de sistema de coordenadas. Vê-se também imediatamente que o princípio da constância da velocidade da luz no vazio tem de ser modificado; porque, como fàcilmente se compreende, a trajectória de um raio de luz em relação a K' é em geral curvilínea se, em relação a K, a luz se propagar em linha recta e com velocidade constante.

§ 3. *O contínuo espaço-tempo. Exigência de covariância geral para as equações que exprimem as leis gerais da natureza*

Na mecânica clássica, bem como na teoria da relatividade especial, as coordenadas de espaço e de tempo têm uma significação física directa. Dizer que um ponto-acontecimento tem a coordenada x_1 sobre o eixo X_1 significa: que a projecção do ponto-acontecimento sobre o eixo X_1, feita por meio de réguas rígidas segundo as regras da geometria euclidiana, se pode obter aplicando sobre o eixo X_1, a partir da origem das coordenadas e no sentido positivo, x_1 vezes uma determinada régua — a régua-unidade. Dizer que um ponto tem sobre o eixo X_4 a coordenada $x_4 = t$ significa: que um relógio-unidade (regulado segundo determinadas prescrições), imóvel em relação ao sistema de coordenadas e coincidente no espaço (pràticamente) com o ponto-acontecimento, tem acabado de efectuar $x_4 = t$ ciclos de funcionamento quando ocorre o ponto-acontecimento *.

Esta concepção de espaço e de tempo sempre andou na mente dos físicos, ainda que inconscientemente para a maior parte deles, e a prova está no papel que estes conceitos desempenham na física métrica. E também o leitor deve ter alicerçado nessa concepção a segunda das reflexões do parágrafo anterior para poder ligar um sentido a esses raciocínios. Mas vamos mostrar agora que ela tem de ser abandonada e substituída por outra mais geral, se quisermos conciliar o postulado da relatividade geral com a validade da teoria da relatividade especial no caso limite da ausência de campo de gravidade.

Num espaço livre de campos de gravidade introduzamos um sistema de referência de Galileu K (x, y, z, t) e, além disso, um sistema de coordenadas K' (x', y', z', t') em movimento de rotação uniforme. Supõem-se em coincidência permanente as origens dos dois sistemas, assim como os seus eixos Z. Vamos mostrar que as normas acima estabelecidas para definir o significado físico de comprimentos e tempos não podem ser mantidas para uma medição espaço-temporal no sistema K'. Por razões de simetria, é claro que uma circunferência traçada no plano X-Y de K com centro na origem pode, ao mesmo tempo, ser considerada como circunferência no plano X'-Y' de K'. Suponhamos agora que se mede o perímetro e o diâmetro desta circunferência com uma régua-unidade (infinitamente pequena em relação ao raio) e que se calcula o quociente dos resultados das medi-

---

* A possibilidade de constatar a «simultaneidade» de acontecimentos em vizinhança espacial imediata, ou — mais rigorosamente — em vizinhança imediata espaço-temporal (coincidência) será aqui admitida sem dar uma definição a este conceito fundamental.

ções. Se a experiência tiver sido efectuada com uma régua imóvel em relação ao sistema de Galileu K, obter-se-á como quociente o número π. Mas o resultado será um número maior que π se for obtido com uma régua que esteja imóvel em relação ao sistema K'. Reconhece-se isto fàcilmente quando se aprecia todo o processo de medição partindo do sistema «em repouso» K, e se tem em conta que a régua disposta ao longo da circunferência sofre a contracção de Lorentz, ao passo que uma régua disposta ao longo do raio não a sofre. Sendo assim, a geometria euclidiana não é válida no sistema K'; e o conceito de coordenada acima definido, visto que pressupõe a validade daquela geometria, também não é aplicável ao sistema K'.

Também não será possível introduzir em K' um tempo que corresponda às exigências da física, definindo-o com relógios de idêntica constituição, imóveis em relação a K'. Para o reconhecermos, bastará que imaginemos dois relógios idênticos, um na origem das coordenadas, outro sobre a circunferência, sendo observados a partir do sistema «em repouso» K. De acordo com um conhecido resultado da teoria da relatividade especial, o relógio colocado sobre a circunferência apresenta — quando observado de K — um ritmo de funcionamento mais lento que o relógio colocado na origem, visto que aquele está animado de movimento e este não. Um observador situado na origem comum das coordenadas que fosse capaz de observar, por meio da luz, o relógio situado sobre a circunferência, verificaria portanto que este relógio se atrasa em relação ao relógio que tem junto de si. E, recusando-se a admitir que a velocidade da luz, no percurso em questão, dependa explìcitamente do tempo, ele interpretará a sua observação dando-lhe o significado de que o relógio colocado sobre a circunferência tem «realmente» um ritmo mais lento que o relógio colocado na origem. Deste modo não lhe será possível evitar uma definição de tempo que inclua o facto de o ritmo de um relógio depender do lugar em que se encontra.

Chegamos assim a esta conclusão: na teoria da relatividade geral não é possível dar às grandezas espaço e tempo definições que permitam a medição directa de diferenças de coordenadas espaciais por meio de uma régua-unidade e a de intervalos de tempo por meio de um relógio-padrão. Assim, o processo até agora utilizado para estabelecer coordenadas, de uma maneira determinada, no contínuo espaço-temporal, torna-se impraticável, e não parece haver nenhum outro caminho que permita encontrar sistemas de coordenadas de tal forma adequados ao universo quadridimensional que da sua aplicação se pudesse esperar para as leis da natureza uma formulação particularmente simples. Nada mais resta, por conseguinte, que considerar como equivalentes em princípio para a descrição da natureza todos os sistemas de coordenadas que se possam imaginar *. Isto equivale a exigir a seguinte condição:

As leis gerais da natureza devem ser representadas por equações que tenham validade em todos os sistemas de coordenadas, isto é, que sejam covariantes em relação a toda e qualquer substituição (covariância geral).

É claro que uma física que satisfaça a este postulado também satisfaz o postulado da relatividade geral, porque em *todas* as substituições estão sempre necessàriamente incluídas aquelas que correspondem a todos os movimentos relativos dos sistemas de coordenadas (tridimensionais). Que esta exigência de covariância geral, que tira ao espaço e ao

* Não mencionaremos aqui certas restrições impostas pela exigência da coordenação unívoca e pela da continuidade.

tempo os últimos resíduos de objectividade física, seja uma exigência natural resulta da reflexão seguinte. Todas as nossas constatações espaço-temporais reduzem-se sempre à determinação de coincidências espaço-temporais. Se, por exemplo, o processo consistir apenas no movimento de pontos materiais, a única coisa que em última análise é observável é o encontro de dois ou mais desses pontos. Mesmo os resultados das nossas medições outra coisa não são que a constatação de tais encontros entre pontos materiais das nossas réguas e outros pontos materiais, ou então coincidências entre ponteiros de relógios, pontos de mostrador e os pontos-acontecimento que se estão considerando e ocorrem no mesmo lugar e no mesmo instante.

A introdução de um sistema de referência não tem outro fim que não seja uma descrição mais fácil do conjunto de tais coincidências. Suponhamos que se associam ao universo quatro variáveis espaço-temporais x_1, x_2, x_3, x_4, de tal modo que a cada ponto-acontecimento corresponda um sistema de valores das variáveis $x_1 \dots x_4$. A dois pontos-acontecimento em coincidência corresponde o mesmo sistema de valores das variáveis $x_1, \dots x_4$; isto é, a coincidência caracteriza-se pela identidade dos valores das coordenadas. Se em vez das variáveis $x_1, \dots x_4$ se introduzirem como coordenadas de um novo sistema funções arbitrárias delas, x_1', x_2', x_3', x'_4, de tal modo que os sistemas de valores se correspondam unìvocamente, então também no novo sistema a coincidência espaço-temporal de dois pontos-acontecimento se exprimirá pela identidade de valores de cada uma das quatro coordenadas. Como toda a nossa experiência física pode, em última análise, ser reduzida a tais coincidências, não há nenhuma razão para dar preferência a determinado sistema de coordenadas em relação a outros, isto é, chegamos ao postulado da covariância geral.

§ 4. *Relacionação das quatro coordenadas com os resultados das medições espaciais e temporais. Expressão analítica para o campo da gravidade*

Não é minha intenção neste artigo apresentar a teoria da relatividade geral como um sistema lógico, simplificado na medida do possível, com um mínimo de axiomas. O meu fim principal é antes desenvolver esta teoria de modo a fazer sentir ao leitor como é psicològicamente natural o caminho que se tomou e como se revelam seguras através da experiência as bases de que se partiu. Com este objectivo em vista, estabeleceremos agora a seguinte premissa:

Desde que se faça uma escolha apropriada de coordenadas, torna-se possível aplicar a teoria da relatividade no sentido restrito a domínios quadridimensionais infinitamente pequenos.

Nessa escolha deve atribuir-se ao sistema de coordenadas infinitamente pequeno («local») um estado de aceleração tal que fique removido todo e qualquer campo de gravidade: o que para uma região infinitamente pequena é possível. Sejam X_1, X_2, X_3, as coordenadas espaciais de tal sistema; X_4 a respectiva coordenada temporal, medida numa unidade apropriada *. Estas coordenadas têm para uma dada orientação do sistema de coordenadas, um significado físico directo dentro da teoria da relatividade especial, desde que se adopte como régua-unidade uma barra rígida. A expressão:

$$(1) \qquad ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2$$

---

* A unidade de tempo deve ser escolhida de tal modo que a velocidade da luz no vácuo — medida no sistema de coordenadas «local» — seja igual a 1.

tem então, segundo a teoria da relatividade especial, um valor que é independente da orientação do sistema de coordenadas local e que é determinável por medição espaço-temporal. Chamaremos a ds grandeza do elemento de linha correspondente a pontos infinitamente próximos do espaço quadridimensional. Se o ds^2 correspondente ao elemento $(dX_1 \ldots dX_4)$ for positivo, nós diremos como Minkowski que este último elemento é de género temporal e no caso contrário de género espacial.

Suponhamos que, em vez do sistema «local» de características especiais acima referido, se adopta como referencial um sistema quadridimensional qualquer, definindo-o para a região que estamos considerando. Então, ao nosso «elemento de linha», ou ao respectivo par de pontos-acontecimento, corresponderão também determinadas diferenciais $dx_1 \ldots dx_4$ das coordenadas desse referencial. E então os dX_ν serão representáveis por expressões lineares e homogéneas dos dx_σ:

$$(2) \qquad dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma}\, dx_\sigma .$$

Se se introduzirem estas expressões em (1), obtém-se

$$(3) \qquad ds^2 = \sum g_{\sigma\tau}\, dx_\sigma\, dx_\tau .$$

Nestas expressões, os $g_{\sigma\tau}$ são funções dos x_σ. Os seus valores não poderão já depender da orientação e do estado de movimento do sistema de coordenadas «local», se quisermos admitir como definição para o ds^2 a de uma grandeza associada a pares de pontos-acontecimento considerados no espaço-tempo, independente de qualquer escolha particular de coordenadas, e determinável por meio de medições de régua e relógio.

Imporemos à escolha dos $g_{\sigma\tau}$ a condição $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$. O somatório, estendido a todos os valores de σ e τ, dar-nos-á então uma soma de 4×4 parcelas, das quais 12 são duas a duas iguais.

Da definição que acabámos de dar ao ds^2 poderá passar-se para o caso da teoria da relatividade habitual sempre que o condicionamento particular dos $g_{\sigma\tau}$ num domínio finito permita estabelecer nesse domínio um sistema de referência em que os $g_{\sigma\tau}$ assumam os valores constantes

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right.$$

Veremos mais tarde que a escolha de tais coordenadas para domínios finitos não é geralmente possível.

Das considerações feitas nos §§ 2 e 3 resulta que, do ponto de vista físico, as grandezas $g_{\sigma\tau}$ devem ser consideradas como sendo aquelas que, relativamente ao sistema de referência que foi escolhido, fazem a descrição do campo de gravidade. Com efeito, admitamos que, para um determinado domínio quadridimensional considerado, se conseguiu alcançar a validade da teoria da relatividade especial mediante uma adequada escolha das coordenadas. Os $g_{\sigma\tau}$ têm então os valores dados em (4). Um ponto material livre terá então, em relação a este sistema, um movimento rectilíneo e uniforme. Se agora introduzirmos, por uma substituição arbitrária, novas coordenadas espaço-temporais $x_1, \ldots, x_4$, os $g_{\sigma\tau}$ no novo sistema não serão já constantes, mas sim funções do espaço-tempo. Ao mesmo tempo, o movimento do ponto material livre apresenta-se nas novas coordenadas como um movimento curvilíneo, não uniforme, cuja lei é independente da natureza do ponto material móvel. Isso leva-nos a interpretá-lo como um movimento sujeito à influência de um campo de gravidade. A intervenção de um campo de gravidade aparece-nos, deste modo, associada a uma variabilidade espaço-temporal dos $g_{\sigma\tau}$. No caso geral não é possível fazer uma escolha de coordenadas que permita alcançar a validade da teoria da relatividade especial num domínio finito, mas mesmo nesse caso manter-nos-emos fiéis à ideia de que os $g_{\sigma\tau}$ descrevem o campo gravítico.

A gravidade desempenha pois, na teoria da relatividade geral, um papel excepcional em relação às outras forças, e particularmente em relação às forças electromagnéticas, visto que as 10 funções $g_{\sigma\tau}$ que fazem a descrição do campo gravítico determinam, ao mesmo tempo, as propriedades métricas do espaço métrico quadridimensional.

B. Instrumentos matemáticos para a construção de equações de covariância geral

Depois de termos reconhecido, nas páginas precedentes, que o postulado da relatividade geral leva à exigência de que os sistemas de equações da física sejam covariantes em relação a substituições arbitrárias de coordenadas $x_1, \ldots, x_4$, temos que pensar na maneira de obter essas equações de covariância geral. É deste problema, puramente matemático, que nos vamos ocupar agora. Como vamos ver, na sua resolução desempenha um papel fundamental o invariante ds, ao qual demos o nome de «elemento de linha», tirado da teoria das superfícies de Gauss.

A ideia fundamental desta teoria geral dos covariantes é a seguinte: Suponhamos que se definem em relação a todo o sistema de coordenadas certos entes («tensores»), sendo a definição feita por meio de um certo número de funções espaciais, que se chamarão as «componentes» do tensor.

Há então determinadas regras pelas quais se podem calcular estas componentes para um novo sistema de coordenadas, desde que sejam conhecidas para o sistema original, e desde que seja também conhecida a transformação que liga os dois sistemas. Os entes a que daqui em diante chamaremos tensores são, além disso, caracterizados pelo facto de as equações de transformação para as suas componentes serem lineares e homogéneas. Sendo assim, todas as componentes no novo sistema se anulam, se isso também suceder a todas elas no sistema primitivo. Consequentemente uma lei da natureza que seja formulada pelo anulamento de todas as componentes de um tensor é de covariância geral: procurando as leis de formação dos tensores obteremos os meios de formulação de leis de covariância geral.

§ 5. *Quadrivectores contravariantes e covariantes*

Quadrivector contravariante. O elemento de linha define-se pelas quatro componentes dx_ν, cuja lei de transformação se exprime pela equação

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} dx_\nu \tag{5}$$

Os dx'_σ exprimem-se nos dx_ν por equações lineares e homogéneas; isso permite-nos considerar estas diferenciais das coordenadas dx_ν como componentes de um «tensor» a que daremos a designação especial de quadrivector contravariante. Todo o ente que em relação ao sistema de coordenadas se defina por meio de quatro grandezas A^ν transformáveis segundo a mesma lei

$$A^{\sigma\prime} = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu \tag{5a}$$

será igualmente denominado quadrivector contravariante. De (5a) resulta imediatamente que as somas ($A^\sigma \pm B^\sigma$) são componentes de um quadrivector se A^σ e B^σ também o forem. O mesmo se aplica a todos os sistemas que mais tarde forem introduzidos como «tensores» (regra da adição e subtracção dos tensores).

Quadrivector covariante. Diremos que quatro grandezas A_ν são as componentes de um quadrivector covariante se para toda e qualquer escolha de um vector contravariante B^ν

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu = \text{Invariante.} \tag{6}$$

Desta definição resulta a lei da transformação do quadrivector covariante. Com efeito, substituindo no segundo membro da equação

$$\sum_\sigma A_\sigma{}' B^{\sigma\prime} = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

B^ν pela seguinte expressão, que se obtém invertendo a equação (5a)

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B^{\sigma\prime},$$

resulta $$\sum_\sigma B^{\sigma\prime} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu = \sum_\sigma B^{\sigma\prime} A_\sigma{}'.$$

Mas daqui resulta a seguinte lei de transformação, se atendermos a que os $B^{\sigma\prime}$ se podem escolher arbitràriamente, em completa independência uns dos outros

$$A_\sigma{}' = \sum \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu. \tag{7}$$

Nota sobre uma simplificação utilizada no modo de escrever as expressões

Um rápido exame das equações deste parágrafo mostra que, sempre que um índice aparece duas vezes debaixo do sinal de somatório, se efectua sobre ele uma soma [por exemplo o índice ν em (5)], e que é *sòmente* sobre tais índices que as somas se efectuam. Isto permite omitir o sinal de somatório, sem com isso prejudicar a clareza. Estabeleceremos então a seguinte regra: sempre que um índice apareça duas vezes num termo de uma expressão, subentende-se que sobre ele se efectua uma soma, a não ser que expressamente se declare o contrário.

A diferença entre o quadrivector covariante e o contravariante reside na lei de transformação [(7) ou (5a), respectivamente]. Tanto uma como outra destas formas constituem tensores no sentido que atrás se deu a esta palavra, e é nisso que reside a sua importância. Seguindo Ricci e Levi-Civita, indicaremos o carácter contravariante com um índice superior e o covariante com um índice inferior.

§ 6. *Tensores de segunda ordem e de ordem superior*

Tensor contravariante. Se formarmos todos os produtos $A^{\mu\nu}$ das componentes A^{μ} e B^{ν} de dois quadrivectores contravariantes obteremos 16 quantidades

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu} \tag{8}$$

que, de acordo com (8) e (5a), satisfazem a lei de transformação

$$A^{\sigma\tau\prime} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} . \tag{9}$$

Chamaremos tensor contravariante de segunda ordem a um ente que, em relação a todo o sistema de referência, é descrito por 16 grandezas (funções) que obedecem à lei de transformação (9). Nem todo o tensor desta espécie se pode construir, como (8), com dois quadrivectores. Mas pode-se demonstrar fàcilmente que 16 $A^{\mu\nu}$ arbitràriamente dados podem ser representados pelas somas dos A^{μ} B^{ν} de quatro pares de vectores convenientemente escolhidos. E por isso quase todas as leis que são válidas para os tensores de segunda ordem definidos por (9) podem ter a sua demonstração muito simplificada, efectuando a prova para tensores especiais do tipo (8).

Tensor contravariante de qualquer ordem. É claro que, em correspondência com (8) e (9), também se podem definir tensores contravariantes de terceira ordem e de ordem mais elevada, com 4^3, etc., componentes. Resulta igualmente de (8) e (9) que o quadrivector contravariante se pode, neste sentido, considerar como tensor contravariante de primeira ordem.

Tensor covariante. Se, por outro lado, formarmos os 16 produtos $A_{\mu\nu}$ das componentes de dois quadrivectores *covariantes* A_{μ} e B_{ν} obteremos quantidades

$$(10) \qquad A_{\mu\nu} = A_{\mu} \; B_{\nu},$$

para as quais é válida a lei de transformação

$$(11) \qquad A_{\sigma\tau}' = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu}.$$

É por meio desta lei de transformação que se define o tensor covariante de segunda ordem. Todas as observações que até aqui se fizeram a respeito dos tensores contravariantes são igualmente válidos para os tensores covariantes.

Nota. É conveniente tratar o escalar (invariante) como tensor de ordem zero, que tanto é contravariante como covariante.

Tensor misto. Pode também definir-se um tensor de segunda ordem do tipo

(12) $$A_{\mu}{}^{\nu} = A_{\mu}\, B^{\nu}$$

que é covariante quanto ao índice μ e contravariante quanto ao índice ν. A sua lei de transformação é

(13) $$A_{\sigma}{}^{\tau\prime} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\alpha}^{\beta}.$$

É claro que há tensores mistos com um número qualquer de índices de carácter covariante e com um número qualquer de índices de carácter contravariante. O tensor covariante e o tensor contravariante podem ser considerados casos especiais do tensor misto.

Tensores simétricos. Um tensor contravariante ou covariante de segunda ordem ou de ordem mais elevada diz-se *simétrico* quando são iguais duas componentes provenientes uma da outra pela permuta de dois índices quaisquer. O tensor $A^{\mu\nu}$ ou o $A_{\mu\nu}$, é pois simétrico se for para qualquer combinação dos índices, respectivamente

(14) $$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu},$$ ou

(14a) $$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$$

É necessário demonstrar que a simetria assim definida é uma propriedade independente do sistema de referência. Com efeito, de (9) resulta, atendendo a (14),

$$A^{\sigma\tau\prime} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu} = A^{\tau\sigma\prime}.$$

A penúltima igualdade provém da permuta dos índices de soma μ e ν (isto é, de uma simples mudança de notação).

Tensores anti-simétricos. Um tensor contravariante ou covariante de segunda, terceira ou quarta ordens diz-se anti-simétrico quando duas componentes provenientes uma da outra por permutação de dois índices quaisquer são *iguais e de sinais contrários.* O tensor $A^{\mu\nu}$, ou o $A_{\mu\nu}$, é pois anti-simétrico sempre que se tenha, respectivamente

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}, \qquad \text{ou} \tag{15}$$

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

Das 16 componentes $A^{\mu\nu}$ reduzem-se a zero as quatro $A^{\mu\mu}$; as restantes são, aos pares, iguais e de sinais contrários, de modo que só há 6 componentes numèricamente diferentes (vector de seis componentes ou sextivector). Do mesmo modo se vê que o tensor anti-simétrico $A^{\mu\nu\sigma}$ (de terceira ordem) só tem quatro componentes numèricamente diferentes, o tensor $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ só tem uma, e não há, no contínuo de quatro dimensões, tensores anti-simétricos de ordem superior à quarta.

§ 7. *Multiplicação de tensores*

Multiplicação externa de tensores. Com as componentes de um tensor de ordem z e as de um outro de ordem z' podem obter-se as componentes de um tensor de ordem $z + z'$, multiplicando duas a duas todas as componentes do primeiro por todas as componentes do segundo. É assim que, no exemplo seguinte, se obtêm os tensores T à custa de tensores A e B, de diversas espécies:

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu}\, B_{\sigma},$$
$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta}\, B^{\gamma\delta},$$
$$T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}\, B^{\gamma\delta}.$$

A prova do carácter tensorial dos T resulta directamente das expressões (8), (10), (12) ou das regras de transformação (9), (11), (13). As equações (8), (10), (12) são em si mesmas exemplos de multiplicação externa (de tensores de primeira ordem).

«Contracção» de um tensor misto. A partir de qualquer tensor misto pode-se formar um tensor de ordem inferior em 2 unidades à do primeiro, igualando um índice de carácter covariante a um de carácter contravariante e somando em relação a tal índice («contracção»). Assim, por exemplo, do tensor misto de quarta ordem $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ obtém-se o tensor de segunda ordem

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \left(= \sum_{\alpha} A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}\right)$$

e deste, novamente por contracção, o tensor de ordem zero $A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$.

A prova de que o resultado da contracção possui realmente carácter tensorial obtém-se com a representação tensorial feita de acordo com a generalização (12) em combinação com (6), ou então por generalização de (13).

Multiplicação interna e mista de tensores. Estas operações consistem na combinação da multiplicação externa com a contracção.

Exemplos. Com o tensor covariante de segunda ordem $A_{\mu\nu}$, e o tensor contravariante de primeira ordem B^{σ} formamos, por multiplicação externa, o tensor misto

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma}.$$

Por contracção segundo os índices ν, σ forma-se o quadrivector covariante

$$D_{\mu} = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\nu}.$$

Chamar-lhe-emos produto interno dos tensores $A_{\mu\nu}$ e B^{σ}. Anàlogamente com os tensores $A_{\mu\nu}$ e $B^{\sigma\tau}$ forma-se, por multiplicação externa e dupla contracção, o produto interno $A_{\mu\nu}\ B^{\mu\nu}$. Com o resultado da multiplicação externa e uma só contracção obtém-se a partir de $A_{\mu\nu}$ e $B^{\sigma\tau}$ o tensor misto de segunda ordem $D^{\tau}_{\mu}=A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$. Pode-se, adequadamente, designar por mista esta operação, visto que é externa em relação aos índices μ e τ e interna em relação aos índices ν e σ.

Vamos agora demonstrar um teorema que se aplica muitas vezes para verificar o carácter tensorial. Segundo o que acabámos de expor, $A_{\mu\nu}\ B^{\mu\nu}$ é um escalar se $A_{\mu\nu}$ e $B^{\sigma\tau}$ forem tensores. Pois vamos agora estabelecer também o seguinte:

Se $A_{\mu\nu}\ B^{\mu\nu}$ for um invariante para *toda e qualquer escolha do tensor* $B^{\mu\nu}$, então $A_{\mu\nu}$ tem carácter tensorial.

Demonstração:

Tem-se, por hipótese, para uma substituição arbitrária,

$$A_{\sigma\tau}'\ B^{\sigma\tau\prime} = A_{\mu\nu}\ B^{\mu\nu}$$

Mas, por inversão de (9)

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}B^{\sigma\tau\prime}.$$

Substituindo na equação anterior:

$$\left(A_{\sigma\tau}' - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}}A_{\mu\nu}\right) B^{\sigma\tau\prime} = 0.$$

Esta igualdade só pode ser satisfeita, sendo arbitrária a escolha de $B^{\sigma\tau\prime}$, se a expressão dentro do parêntese for nula. Daqui resulta, atendendo a (11), o teorema que enunciámos.

Pode-se, de modo análogo, demonstrar um teorema correspondente a este para tensores de qualquer ordem e de qualquer carácter.

O mesmo teorema pode ainda demonstrar-se na forma seguinte:

Se B^μ e C^ν forem vectores arbitrários e se, quaisquer que eles sejam, o produto interno

$$A_{\mu\nu}\ B^\mu\ C^\nu$$

for um escalar, então $A_{\mu\nu}$ é um tensor covariante.

Podemos estender a validade desta última proposição ao caso mais restrito de a invariância se verificar no produto escalar

$$A_{\mu\nu}\ B^\mu\ B^\nu$$

para uma escolha arbitrária do quadrivector B^μ, desde que saibamos que $A_{\mu\nu}$ obedece à condição de simetria $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$. Com efeito, prova-se então, seguindo o caminho que acabamos de indicar, que $(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$ tem carácter tensorial, donde se segue, por virtude da propriedade da simetria, o carácter tensorial de $A_{\mu\nu}$. Também este teorema se pode generalizar fàcilmente ao caso de tensores covariantes e contravariantes de qualquer ordem.

Finalmente, resulta do que foi demonstrado o seguinte teorema, que pode igualmente ser generalizado a quaisquer tensores: Se as grandezas $A_{\mu\nu}\ B^\nu$ formam um tensor de primeira ordem para uma escolha arbitrária do quadrivector B^ν, então $A_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem. Com efeito, se C^μ for um quadrivector arbitrário, então, por causa do carácter tensorial de $A_{\mu\nu}\ B^\nu$, o produto interno $A_{\mu\nu}\ C^\mu\ B^\nu$ será um escalar, qualquer que seja a escolha dos quadrivectores C^μ e B^ν: donde resulta a afirmação feita.

§ 8. *Algumas notas sobre o tensor fundamental dos* $g_{\mu\nu}$

O tensor fundamental covariante. Na expressão invariante do quadrado do elemento da linha $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$, dx_μ desempenha o papel de um vector contravariante de escolha arbitrária. E como, além disso, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, segue-se, em conformidade com as considerações do último parágrafo, que $g_{\mu\nu}$ é um tensor covariante de segunda ordem. Chamar-lhe-emos «tensor fundamental». Deduziremos de seguida algumas propriedades deste tensor, que na verdade pertencem a todo o tensor de segunda ordem; mas o papel especial desempenhado pelo tensor fundamental na nossa teoria, que tem os seus fundamentos físicos na peculiaridade das acções gravíticas, faz com que as relações a desenvolver só tenham importância para nós em relação ao tensor fundamental.

O tensor fundamental contravariante. Tomemos no determinante formado com os elementos $g_{\mu\nu}$ o menor correspondente a cada um dos $g_{\mu\nu}$ e dividamo-lo pelo determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ dos $g_{\mu\nu}$: obteremos assim certas grandezas $g^{\mu\nu}$ $(= g^{\nu\mu})$ que, como vamos demonstrar, formam um tensor contravariante.

Segundo uma conhecida propriedade dos determinantes, teremos

$$g_{\mu\sigma}\, g^{\nu\sigma} = \delta_\mu{}^\nu, \tag{16}$$

onde o símbolo $\delta_\mu{}^\nu$ significa 1 ou 0, consoante for $\mu = \nu$ ou $\mu \neq \nu$. Em vez da expressão anterior de ds^2 podemos então também escrever

$$g_{\mu\sigma}\, \delta_\nu{}^\sigma\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

ou ainda, atendendo a (16),

$$g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\tau}\, g^{\sigma\tau}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

Mas, segundo as regras de multiplicação dos parágrafos precedentes, as grandezas

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}\, dx_\mu$$

formam um quadrivector covariante, que é de escolha arbitrária (dado que o são os dx_μ). Introduzindo-o na nossa expressão, obtemos

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}\, d\xi_\sigma\, d\xi_\tau.$$

Como isto é um escalar para uma escolha arbitrária do vector $d\xi_\sigma$ e como $g^{\sigma\tau}$ é por definição simétrico nos índices σ e τ, segue-se, de acordo com os resultados do parágrafo precedente, que $g^{\sigma\tau}$ é um tensor contravariante. De (16) resulta ainda que $\delta_\mu{}^\nu$ é também um tensor: chamar-lhe-emos tensor fundamental misto.

Determinante do tensor fundamental. Pela regra de multiplicação dos determinantes, teremos

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}|\; |g^{\alpha\nu}|.$$

Por outro lado,

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu{}^\nu| = 1.$$

Donde

(17) $$|g_{\mu\nu}|\; |g^{\mu\nu}| = 1.$$

O invariante do volume *. Comecemos por determinar a lei de transformação do determinante $g = |g_{\mu\nu}|$. Em vista de (11) temos

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|.$$

* No raciocínio que se segue omitem-se por simplicidade, o sinais de integral, que em rigor seriam necessários.

Daqui resulta, aplicando duas vezes a regra da multiplicação de determinantes

$$g' = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \left|\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\right| \cdot |g_{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right|^2 g,$$

ou

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\right| \sqrt{g}.$$

Por outro lado, a lei de transformação do elemento

$$d\tau = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

é, segundo o conhecido teorema de Jacobi

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\tau.$$

Multiplicando as duas últimas equações, obtém-se

$$\sqrt{g'}\, d\tau' = \sqrt{g}\, d\tau. \tag{18}$$

Em vez de $\sqrt{g}$ introduziremos no que se segue a grandeza $\sqrt{-g}$, que tem sempre valor real, em virtude do carácter hiperbólico do contínuo espaço-tempo. O invariante $\sqrt{-g}\, d\tau$ é igual à grandeza do elemento de volume quadridimensional, medido no «sistema de referência local» por meio de barras rígidas e relógios, tal como na teoria da relatividade especial.

Nota sobre o carácter do contínuo espaço-tempo. A nossa suposição de que a teoria da relatividade especial é sempre válida no infinitamente pequeno arrasta consigo a consequência de que ds^2 se pode sempre exprimir, de acordo com (1), por meio das grandezas reais dX_1, dX_2, dX_3, dX_4. Se designarmos por $d\tau_0$ o elemento de volume «natural» $dX_1 . dX_2 . dX_3 . dX_4$, teremos então

$$d\tau_0 = \sqrt{-g}\, .\, d\tau. \tag{18a}$$

Se $\sqrt{-g}$ tendesse para zero em determinado local do contínuo quadridimensional, isso significaria que, nesse local, a um volume finito definido com as coordenadas corresponderia um volume «natural» infinitamente pequeno. Admitamos que isso não possa nunca suceder. Nesse caso, g não poderá mudar de sinal: admitiremos, em acordo com a teoria da relatividade especial, que g tem sempre um valor finito negativo. Isto constitui uma hipótese sobre a natureza física do contínuo considerado e, ao mesmo tempo, uma estipulação sobre a escolha das coordenadas.

Mas se $-g$ é sempre positivo e finito, está naturalmente indicado que se faça «a posteriori» uma escolha de coordenadas tal que esta grandeza seja igual a 1. Veremos mais tarde que uma tal limitação imposta à escolha das coordenadas permite chegar a uma simplificação apreciável das leis da natureza. Em vez de (18), temos então simplesmente

$$d\tau' = d\tau$$

donde, atendendo ao teorema de Jacobi,

$$\left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| = 1. \tag{19}$$

Com esta escolha de coordenadas só são pois admissíveis as substituições de coordenadas que tenham determinante igual a 1.

Seria porém erróneo crer que este passo represente uma renúncia parcial ao postulado da relatividade geral. Não perguntaremos: «quais são as leis da Natureza que são covariantes em relação a todas as transformações cujo determinante é 1?» Perguntamos sim: «quais são as leis da natureza de covariância *geral*?» Só depois de as termos estabelecido é que faremos uma escolha particular do sistema de referência para simplificar a sua expressão.

Construção de novos tensores por meio do tensor fundamental. Por meio da multiplicação interna, da multiplicação externa e da multiplicação mista de um tensor pelo tensor fundamental formam-se tensores de outro carácter e de outra ordem.

Exemplos:

$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma} A_{\sigma},$$
$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Notem-se especialmente as construções seguintes:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$
$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}.$$

(«complementos», respectivamente, do tensor covariante e do contravariante), e

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Chamaremos $B_{\mu\nu}$ o tensor reduzido correspondente a $A_{\mu\nu}$. Anàlogamente

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Note-se que $g^{\mu\nu}$ não é mais que o complemento de $g_{\mu\nu}$. Com efeito

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_{\alpha}^{\nu} = g^{\mu\nu}.$$

§ 9. *Equação da linha geodésica (isto é, do movimento do ponto)*

Como o «elemento de linha» ds é uma grandeza definida independentemente do sistema de coordenadas, também a linha traçada entre os dois pontos P_1 e P_2 do contínuo quadridimensional para a qual $\int ds$ é um extremo (linha geodésica) tem um significado independente da escolha das coordenadas. A sua equação é

$$\delta\left\{\int_{P_1}^{P_2} ds\right\} = 0. \tag{20}$$

Partindo desta equação chega-se por um conhecido processo do cálculo das variações a quatro equações diferenciais totais, que determinam esta linha geodésica. Para apresentar o assunto de um modo completo, vamos fazer aqui essa dedução. Seja λ uma função das coordenadas x_ν; esta função define uma família de superfícies que interceptam a linha geodésica procurada, assim como as linhas infinitamente próximas desta que passem pelos pontos P_1 e P_2. Qualquer destas linhas pode então imaginar-se determinada pela expressão das suas coordenadas x_ν em função de λ. Suponhamos que o símbolo δ corresponde ao transporte de um ponto da linha geodésica procurada para o ponto de uma curva vizinha que corresponde ao mesmo λ. Nesse caso, poderemos substituir (20) por

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w\, d\lambda = 0 \\ &w^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda} \end{aligned}\right. \tag{20a}$$

Mas como

$$\delta w = \frac{1}{w}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\delta x_\sigma + g_{\mu\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_\sigma}{d\lambda}\right)\right\},$$

resulta, substituindo δw em (20a), tendo em conta que

$$\delta\left(\frac{dx_\sigma}{d\lambda}\right) = \frac{d\delta x_\sigma}{d\lambda},$$

e após integração parcial

$$
(20b) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varkappa_\sigma \delta x_\sigma d\lambda = 0 \\ \displaystyle\varkappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\alpha}}{w}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right\} - \frac{1}{2w}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}. \end{cases}
$$

Daqui resulta, por ser arbitrária a escolha dos δx_σ, que os $\varkappa_\sigma$ se reduzem a zero:

$$
(20c) \qquad \varkappa_\sigma = 0.
$$

Tais são as equações da linha geodésica. Se não for $ds = 0$ sobre a linha geodésica considerada, poderemos tomar como parâmetro λ o «comprimento de arco» s medido sobre a linha geodésica. Será então $w = 1$ e, em vez de (20c), teremos:

$$
g_{\mu\sigma}\frac{d^2x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\frac{dx_\nu}{ds}\frac{dx_\mu}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0
$$

ou, com uma simples mudança de notação

$$
(20d) \qquad g_{\alpha\sigma}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} + \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0
$$

onde se introduziu, seguindo Christoffel

$$
(21) \qquad \begin{bmatrix}\mu\nu\\ \sigma\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right).
$$

Se, finalmente, multiplicarmos (20d) por $g^{\sigma\tau}$ (multiplicação externa em relação a τ e interna em relação a σ), obtém-se para forma definitiva da equação da linha geodésica

$$
(22) \qquad \frac{d^2x_\tau}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0
$$

na qual se introduziu, seguindo Christoffel

$$
(23) \qquad \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix} = g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}.
$$

§ 10. *A construção de tensores por meio de diferenciação*

Apoiados na equação da linha geodésica podemos agora deduzir fàcilmente as leis segundo as quais se podem construir por diferenciação novos tensores a partir doutros. Só então nos encontraremos aptos a formular equações diferenciais de covariância geral. Atingiremos este objectivo por aplicação repetida deste simples teorema:

Se, no nosso contínuo, os pontos de uma dada curva forem definidos pela medida s do arco («Bogendistanz») que os separa de um determinado ponto fixo da curva, e se φ for uma função espacial invariante, então $d\varphi/ds$ será também um invariante. A prova está em que tanto $d\varphi$ como ds são invariantes.

Ora, sendo
$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

segue-se que também
$$\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

é um invariante, sendo-o para todas as curvas que partam de um ponto do contínuo, isto é, para uma escolha arbitrária do vector dos dx_μ. Daqui resulta imediatamente que

$$A_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

é um quadrivector covariante (*gradiente* de φ).

Segundo o nosso teorema, também a derivada
$$\chi = \frac{d\psi}{ds}$$

tomada sobre uma curva é um invariante. Substituindo ψ pela sua anterior expressão resulta

$$\chi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

Daqui não se pode inferir directamente a existência de um tensor. Mas se estabelecermos agora que a curva sobre a qual se fez a diferenciação é uma linha geodésica, então, por substituição de d^2x_ν/ds^2 pela sua expressão tirada de (22), teremos:

$$\chi = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Como se pode inverter a ordem das diferenciações em relação a μ e ν e como, segundo (23) e (21), o colchete $\left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\}$ é simétrico relativamente a μ e ν, segue-se que a expressão entre parênteses também é simétrica em μ e ν. E, como a partir de um ponto do contínuo se pode traçar uma linha geodésica em qualquer direcção, sendo portanto dx_μ/ds um quadrivector de livre escolha de razão de componentes, segue-se, de acordo com os resultados do § 7, que

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

é um tensor covariante de segunda ordem.

Chegamos deste modo ao seguinte resultado: com o tensor covariante de primeira ordem

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

pode-se construir, por diferenciação, um tensor covariante de segunda ordem

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\} A_\tau. \tag{26}$$

A este tensor $A_{\mu\nu}$ chamaremos a «extensão» («*Erweiterung*») do tensor A_μ.

Poderemos agora mostrar fàcilmente que o processo de formação de expressões que acabamos de indicar continua a originar tensores quando já não se verifique a condição acima admitida de A_μ poder ser considerado um gradiente.

Para provarmos isso, comecemos por notar que

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

é um quadrivector covariante quando ψ e φ forem escalares. Também assim sucede a uma soma de quatro termos análogos ao anterior

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + \cdot + \cdot + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

desde que $\psi^{(1)}$ $\varphi^{(1)}$ ... $\psi^{(4)}$ $\varphi^{(4)}$ sejam escalares.

Ora é claro que qualquer quadrivector covariante se pode representar na forma S_μ: com efeito, se A_μ for um quadrivector cujas componentes sejam dadas por funções quaisquer dos x_ν, bastará tomar (em relação ao sistema de coordenadas escolhido)

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)} &= A_1, & \varphi^{(1)} &= x_1, \\
\psi^{(2)} &= A_2, & \varphi^{(2)} &= x_2, \\
\psi^{(3)} &= A_3, & \varphi^{(3)} &= x_3, \\
\psi^{(4)} &= A_4, & \varphi^{(4)} &= x_4,
\end{aligned}$$

para se conseguir que S_μ se torne igual a A_μ.

Sendo assim, se conseguirmos demonstrar que $A_{\mu\nu}$ é um tensor sempre que, no segundo membro da sua expressão, A_μ represente um quadrivector da forma S_μ, demonstrada ficará a mesma afirmação para o caso de A_μ representar um quadrivector covariante inteiramente arbitrário.

Ora um rápido exame de (26) mostra que basta fazer a demonstração para o caso de ser

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

para que fique feita para S_μ. Considerando então esse caso, notemos que o produto por ψ do egundo membro de (25)

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

tem carácter tensorial. E

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

é igualmente um tensor (produto externo de dois quadrivectores). De uma adição resultará então o carácter tensorial de

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \left\{ {\mu \nu \atop \tau} \right\} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}\right).$$

Com isto fica feita a demonstração para o quadrivector

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

como se reconhece imediatamente olhando para (26). E portanto ficará igualmente feita, como se provou, para todo e qualquer quadrivector A_μ.

Recorrendo à extensão do quadrivector, fácil é definir a «extensão» de um tensor covariante de ordem arbitrária por generalização daquela. Limitar-nos-emos a estabelecer a extensão do tensor de segunda ordem, porque esta deixa já compreender claramente qual é a lei de formação.

Como já foi notado, todo o tensor covariante de segunda ordem pode ser representado por uma soma de tensores do tipo $A_\mu B_\nu$ *. Bastará por isso deduzir a fórmula da «extensão» para tensores deste tipo especial.

De acordo com (26), as expressões

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma \mu \atop \tau} \right\} A_\tau ,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma \nu \atop \tau} \right\} B_\tau$$

têm carácter tensorial. Multiplicando externamente a primeira por B_ν e a segunda por A_μ, obtém-se em cada um dos casos um tensor de terceira ordem; a adição desses tensores dá o tensor, também de terceira ordem,

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma \mu \atop \tau} \right\} A_{\tau\nu} - \left\{ {\sigma \nu \atop \tau} \right\} A_{\mu\tau} , \tag{27}$$

onde se pôs $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Como o segundo membro de (27) é linear e homogéneo em relação aos $A_{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas, esta lei de formação conduz a um tensor, não só quando se parte de um tensor do tipo $A_\mu B_\nu$, mas ainda quando se parte de uma soma de tensores desse tipo, isto é, quando se parte de um tensor covariante arbitrário de segunda ordem. Ao tensor $A_{\mu\nu\sigma}$ daremos o nome de extensão do tensor $A_{\mu\nu}$.

---

* Por multiplicação externa dos vectores que têm respectivamente por componentes A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} e 1, 0, 0, 0, forma-se um tensor com as componentes

A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Por adição de quatro tensores deste tipo obtém-se o tensor cujas componentes foram arbitràriamente prefixadas.

É claro que (26) e (24) exprimem apenas casos especiais de extensão (de tensores de ordem 1 e de ordem 0, respectivamente). De um modo geral, todas as leis especiais de construção de tensores podem ser consideradas provenientes de (27) em combinação com multiplicações de tensores.

§ 11. *Alguns casos particulares de especial importância*

Alguns lemas respeitantes ao tensor fundamental.

Vamos agora estabelecer fórmulas que nos hão-de ser de grande utilidade no que se segue.

Em virtude da regra da diferenciação de determinantes, tem-se

$$dg = g^{\mu\nu} g \, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \, g \, dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

A última expressão obtém-se da penúltima, atendendo a que

$g_{\mu\nu} \, g^{\mu'\nu} = \delta^{\mu'}_{\mu}$ donde $g_{\mu\nu} \, g^{\mu\nu} = 4$ e por conseguinte

$$g_{\mu\nu} \, dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \, dg_{\mu\nu} = 0.$$

De (28) resulta

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lg(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = \tag{29}$$

$$= -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

De

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

resulta, por outro lado, por diferenciação

$$\left\{ \begin{aligned} & g_{\mu\sigma} \, dg^{\nu\sigma} = -g^{\nu\sigma} \, dg_{\mu\sigma} \\ \text{e} \quad & g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} = -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \end{aligned} \right. \tag{30}$$

Efectuando o produto misto por $g^{\sigma\tau}$ e $g_{\nu\lambda}$, respectivamente, obtém-se (modificando a notação dos índices)

$$
(31) \qquad \left\{
\begin{aligned}
dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} dg_{\alpha\beta}, \\
\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}
\end{aligned}
\right.
$$

e correspondentemente

$$
(32) \qquad \left\{
\begin{aligned}
dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dg^{\alpha\beta} \\
\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}.
\end{aligned}
\right.
$$

A relação (31) é susceptível de uma transformação que também havemos de utilizar muitas vezes. Segundo (21), temos

$$
(33) \qquad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \begin{bmatrix} \alpha\,\sigma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\,\sigma \\ \alpha \end{bmatrix}.
$$

Introduzindo esta relação na segunda das fórmulas (31) obtém-se, atendendo a (23),

$$
(34) \qquad \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\,\sigma \\ \nu \end{Bmatrix} + g^{\nu\tau} \begin{Bmatrix} \tau\,\sigma \\ \mu \end{Bmatrix} \right).
$$

Introduzindo agora em (29) o segundo membro desta relação (34), vem

$$
(29a) \qquad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \begin{Bmatrix} \mu\,\sigma \\ \mu \end{Bmatrix}.
$$

«Divergência» do quadrivector contravariante. Se multiplicarmos (26) pelo tensor fundamental contravariante $g^{\mu\nu}$ (multiplicação interna), o segundo membro tomará a seguinte forma, depois de transformado o seu primeiro termo [1]):

$$
\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu} A_\mu) - A_\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) g^{\mu\nu} A_\tau.
$$

O último dos três termos desta expressão pode, atendendo a (31) e (29), escrever-se com a forma

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\tau\alpha}A_\tau \quad 2)$$

Como a denominação dos índices de soma se pode modificar livremente, os dois primeiros termos desta última expressão são cancelados pelo segundo termo da penúltima; e o terceiro termo da última pode reduzir-se com o primeiro da penúltima 3). Se depois fizermos

$$g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu,$$

onde A^ν, bem como A_μ, designa um vector arbitrário, obteremos finalmente

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\,A^\nu). \tag{35}$$

Este escalar é a *divergência* do quadrivector contravariante A^ν.

«Rotacional» do quadrivector (covariante).

O segundo termo de (26) é simétrico em relação aos índices μ e ν. Daqui resulta a possibilidade da construção de um novo tensor (anti-simétrico) de maneira particularmente simples: o tensor $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$. Representando-o por $B_{\mu\nu}$, teremos então

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

Extensão anti-simétrica de um sextivector.

Se aplicarmos (27) a um tensor anti-simétrico de segunda ordem, $A_{\mu\nu}$, e se somarmos à equação assim obtida as duas equações que provêm dela por permutação circular dos índices μ, ν, σ, chegaremos ao tensor de terceira ordem

$$(37) \quad B_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu\sigma} + A_{\nu\sigma\mu} + A_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu},$$

que é anti-simétrico, como fàcilmente se prova.

Divergência do sextivector.

Se multiplicarmos (27) por $g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}$ (multiplicação mista), obteremos ainda um tensor. O primeiro termo do segundo membro de (27) pode [4]) escrever-se na forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}) - g^{\mu\alpha} \frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu} - g^{\nu\beta} \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma} A_{\mu\nu}.$$

Substituindo $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu\sigma}$ por $A^{\alpha\beta}_{\sigma}$, e $g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\mu\nu}$ por $A^{\alpha\beta}$; e substituindo ainda, no primeiro termo já transformado,

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

pelas suas expressões (34), obtém-se a partir do segundo membro de (27) uma expressão de sete termos, quatro dos quais se cancelam entre si. Resta então

$$(38) \qquad A^{\alpha\beta}_{\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} + \left\{ {\sigma\varkappa \atop \alpha} \right\} A^{\varkappa\beta} + \left\{ {\sigma\varkappa \atop \beta} \right\} A^{\alpha\varkappa}.$$

Tal é a expressão da extensão de um tensor contravariante de segunda ordem: expressões correspondentes a esta podem-se estabelecer para tensores contravariantes de ordem mais alta e mais baixa. E é de notar que, seguindo um processo análogo, se pode também chegar à extensão de um tensor misto:

$$(39) \qquad A^{\alpha}_{\mu\sigma} = \frac{\partial A^{\alpha}_{\mu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma\mu \atop \tau} \right\} A^{\alpha}_{\tau} + \left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\} A^{\tau}_{\mu}.$$

Por contracção de (38) em relação aos índices β e σ (multiplicação interna por δ^{α}_{β}), obtém-se o quadrivector contravariante

$$A^{\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \left\{ {\beta \varkappa \atop \beta} \right\} A^{\alpha\varkappa} + \left\{ {\beta \varkappa \atop \alpha} \right\} A^{\varkappa\beta}.$$

Dada a simetria de $\left\{ {\beta\varkappa \atop \alpha} \right\}$ em relação aos índices β e $\varkappa$, o terceiro termo do segundo membro reduz-se a zero se $A^{\alpha\beta}$ for um tensor anti-simétrico, o que vamos admitir; por outro lado, o segundo termo pode ser transformado por aplicação de (29a). Obtém-se assim

$$(40) \qquad A^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\, A^{\alpha\beta})}{\partial x_{\beta}}.$$

É esta a expressão da divergência de um sextivector contravariante.

Divergência do tensor misto de segunda ordem.

Efectuando a contracção de (39) em relação aos índices α e σ, obteremos, atendendo a (29a)

$$(41) \qquad \sqrt{-g}\, A_{\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\mu})}{\partial x_{\sigma}} - \left\{ {\sigma \mu \atop \tau} \right\} \sqrt{-g}\, A^{\sigma}_{\tau}.$$

Introduzindo no último termo o tensor contravariante $A^{\rho\sigma} = g^{\rho\tau} A^{\sigma}_{\tau}$, ele tomará a forma

$$-\left[{\sigma \mu \atop \rho} \right] \sqrt{-g}\, A^{\rho\sigma}$$

Se o tensor $A^{\rho\sigma}$ for simétrico, a expressão anterior reduzir-se-á a

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\, A^{\rho\sigma}$$

Se, em vez de $A^{\rho\sigma}$, se tivesse introduzido o tensor covariante, igualmente simétrico, $A_{\rho\sigma} = g_{\rho\alpha}\, g_{\sigma\beta}\, A^{\alpha\beta}$, então o último termo teria tomado, em virtude de (31), a forma

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\,A_{\rho\sigma}.$$

Assim, no caso de simetria considerado, (41) pode substituir-se por qualquer das formas

$$(41a)\qquad \sqrt{-g}\,A_\mu = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma}$$

e

$$(41b)\qquad \sqrt{-g}\,A_\mu = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,A_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\mu}\sqrt{-g}\,A_{\rho\sigma},$$

que havemos de aplicar mais tarde.

§ 12. O tensor de Riemann-Christoffel

Vamos agora investigar quais são os tensores que se podem formar por diferenciação, utilizando como ponto de partida *sòmente* o tensor fundamental dos $g_{\mu\nu}$. A resposta parece à primeira vista muito fácil. Basta substituir em (27) o tensor arbitrário $A_{\mu\nu}$ pelo tensor fundamental dos $g^{\mu\nu}$ para se obter um novo tensor, que é a extensão do tensor fundamental. Mas é fácil chegar à convicção de que tal tensor é idênticamente nulo. Poderemos, no entanto, atingir o objectivo em vista seguindo o caminho que se vai expor. Introduzamos em (27)

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \rho} \right\} A_\rho,$$

isto é, a extensão do quadrivector A_μ. Obtém-se então (com uma pequena modificação nos nomes dos índices) o tensor de terceira ordem

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}$$

$$- \left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau} - \left\{ {\mu\tau \atop \rho} \right\} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma} - \left\{ {\sigma\tau \atop \rho} \right\} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}$$

$$+ \left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\} + \left\{ {\mu\tau \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\sigma \atop \rho} \right\} + \left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\mu \atop \rho} \right\} \right] A_\rho .$$

Esta expressão sugere a construção do tensor $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$, visto que, nessa construção, o primeiro termo da expressão de $A_{\mu\sigma\tau}$, o quarto termo, e também o termo correspondente à última parcela do parêntese recto, são cancelados pelos termos da mesma ordem da expressão de $A_{\mu\tau\sigma}$, dado que todos esses termos são simétricos em σ e τ. E o mesmo acontece com a soma do segundo e terceiro termos. Obtemos assim

$$(42) \qquad A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^\rho_{\mu\sigma\tau} A_\rho ,$$

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} B^\rho_{\mu\sigma\tau} = & -\frac{\partial}{\partial x_\tau} \left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \left\{ {\mu\tau \atop \rho} \right\} \\ & - \left\{ {\mu\sigma \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\tau \atop \rho} \right\} + \left\{ {\mu\tau \atop \alpha} \right\} \left\{ {\alpha\sigma \atop \rho} \right\} . \end{aligned} \right.$$

O que há de essencial neste resultado é que no segundo membro de (42) entra apenas os A_ρ e não já as suas derivadas. Do carácter tensorial de $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$, em conjunção com o facto de A_ρ ser um quadrivector de escolha arbitrária, resulta, tendo em vista as conclusões do § 7, que $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ é um tensor (tensor de Riemann-Christoffel).

A importância matemática deste tensor provém do seguinte. Quando o contínuo é constituído de tal modo que existe um sistema de coordenadas em relação ao qual os $g_{\mu\nu}$

são constantes, então todos os $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ 5) se reduzem a zero. Se substituirmos o sistema de coordenadas original por um novo sistema, arbitrário, os $g_{\mu\nu}$ referidos a este já não serão constantes; mas o carácter tensorial de $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ 5) arrasta consigo a consequência de estas componentes continuarem a ser todas nulas no sistema de referência arbitrário. O anulamento do tensor de Riemann é assim uma condição necessária para se obter a constância dos $g_{\mu\nu}$ mediante uma escolha apropriada do sistema de referência *). No nosso problema isto corresponde a conseguir a validade da teoria da relatividade especial num domínio finito mediante uma escolha conveniente do sistema de coordenadas.

Por contracção de (43) em relação aos índices τ e ρ, obtém-se o tensor covariante de segunda ordem

$$
(44) \qquad \left\{
\begin{aligned}
B_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \\
R_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} \\
S_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.
\end{aligned}
\right.
$$

Observação sobre a escolha das coordenadas. Já foi notado no § 8, a propósito da equação (18a), que há vantagem em escolher o sistema de coordenadas por forma a tornar $\sqrt{-g} = 1$. Um rápido exame das equações obtidas nos dois últimos parágrafos mostra que, com essa escolha, as leis de formação de tensores sofrem uma simplificação notável. Isto aplica-se em particular ao tensor $B_{\mu\nu}$ que acabámos de desenvolver, o qual vai desempenhar um papel fundamental na teoria que vamos apresentar. Com efeito, a escolha do

---

* Os matemáticos demonstraram que esta condição é também *suficiente*.

stema especial de coordenadas que vimos referindo origina o anulamento de $S_{\mu\nu}$, e isso reduz o tensor $B_{\mu\nu}$ a $R_{\mu\nu}$.

Por este motivo, todas as relações serão daqui em diante apresentadas na forma simplificada a que a referida escolha particular de coordenadas conduz. É depois fácil voltar às equações covariantes *gerais*, se isso se mostrar conveniente num caso particular.

C. Teoria do campo gravítico

§ 13. *Equação do movimento do ponto material no campo gravítico. Expressão das componentes desse campo*

Segundo a teoria da relatividade especial, um corpo que se move livremente, sem sujeição a forças exteriores, fá-lo em movimento rectilíneo e uniforme. Esta afirmação continua a ser válida na teoria da relatividade geral, para uma porção do espaço quadridimensional em que seja possível escolher o sistema de coordenadas K_0 — e se escolha de facto — de tal modo que os $g_{\mu\nu}$ tomem os valores constantes dados em (4).

Mas consideremos agora o mesmo movimento a partir de um sistema de coordenadas de escolha arbitrária K_1; apreciado de tal sistema ele apresenta-se como movimento efectuado num campo de gravidade, de acordo com as reflexões expostas no § 2. A lei deste movimento em relação a K_1 estabelece-se fàcilmente com o raciocínio seguinte:

Em relação a K_0, a lei do movimento é representada por uma recta quadridimensional, isto é, por uma linha geodésica. Ora a linha geodésica tem uma definição independente do sistema de referência; logo, a sua equação é também a equação do movimento do ponto em relação a K_1. Pondo

$$(45) \qquad \Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\},$$

teremos então, como equação do movimento do ponto em relação a K_1,

$$(46) \qquad \frac{d^2 x_\tau}{ds^2} = \Gamma^\tau_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Admitamos agora a hipótese, muito plausível, de que este sistema de equações, que goza de covariância geral, continua a determinar o movimento do ponto no campo gravítico mesmo no caso de não existir nenhum sistema de referência K_0 em relação ao qual a teoria da relatividade especial seja válida para regiões finitas. O facto de em (46) não entrarem senão *primeiras* derivadas dos $g_{\mu\nu}$ justifica ainda mais que adoptemos tal hipótese, visto que entre as primeiras derivadas não há quaisquer relações, nem mesmo no caso de existir K_0 *.

Se os $\Gamma^\tau_{\mu\nu}$ se reduzirem a zero, o movimento do ponto será rectilíneo e uniforme; logo, são essas as grandezas que fazem com que o movimento se afaste da uniformidade: são elas as componentes do campo gravítico.

§ 14. As equações do campo gravítico na ausência de matéria

Na distinção que a seguir vamos fazer entre «campo gravítico» e «matéria», daremos a este último termo o significado de tudo quanto não for campo de gravidade, incluindo

---

* É sòmente nas segundas derivadas (relacionadas com as primeiras) que, segundo o § 12, aparecem as relações $B^\rho_{\mu\sigma\tau} = 0$. *Sendo assim, as equações* (46) *em que só entram primeiras derivadas devem ter um significado independente da existência ou não existência de* K_0 (N. T.).

assim, dentro dele, não só aquilo que vulgarmente se entende por matéria, mas também o campo electromagnético.

O problema que vamos agora resolver é o de estabelecer as equações de campo da gravidade na ausência de matéria. Para isso, vamos outra vez aplicar o método que seguimos no parágrafo anterior para estabelecer a equação do movimento do ponto material.

Notemos então que as equações de campo que estamos procurando devem sempre ser verificadas quando se dê o caso particular de a teoria primitiva da relatividade poder ser aplicada, isto é, quando os $g_{\mu\nu}$ tomarem certos valores constantes. Admitamos que esse caso se dá em determinado domínio finito, desde que se adopte como sistema de referência um certo sistema de coordenadas K_0. Em relação a esse sistema, todas as componentes $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ do tensor de Riemann se reduzem a zero ao mesmo tempo [equação (43)]; e então, para o referido domínio, essas componentes serão igualmente nulas relativamente a qualquer outro sistema de coordenadas que seja adoptado.

Sendo assim, as equações que vimos a procurar estabelecer para o campo gravítico vazio de matéria devem verificar-se sempre que sejam nulos todos os $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Mas esta condição suficiente não é certamente necessária: para o reconhecermos claramente, basta notar que deve ser impossível escolher um sistema de coordenadas capaz de «eliminar por transformação» o campo gravítico criado por um ponto material à sua volta, isto é, capaz de o transformar por forma que os $g_{\mu\nu}$ fiquem constantes 6).

Somos deste modo levados a pensar que a condição exigida pelo campo gravítico vazio de matéria deve ser o desvanecimento do tensor simétrico $B_{\mu\nu}$ que se obtém contraindo o tensor $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Chegamos assim a 10 equações para as 10 grandezas $g_{\mu\nu}$. O caso de serem nulos todos os $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ é um caso especial da verificação dessas equações.

Com o sistema de coordenadas que atrás decidimos adoptar [7]) vê-se, atendendo a (44), que as mesmas equações tomam a forma

$$(47) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0 \\ \sqrt{-g} = 1. \end{array} \right.$$

É de salientar quanto é pequeno o grau de arbitrariedade envolvido na escolha das equações: com efeito, à excepção de $B_{\mu\nu}$, não existe nenhum tensor de segunda ordem que, sendo construído com os $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas, não contenha derivadas de ordem superior à segunda e seja linear nas derivadas de segunda *.

As equações a que acabámos de chegar, combinadas com as equações (46) do movimento, conduzem em primeira aproximação à lei de atracção de Newton, e em segunda aproximação à explicação do movimento do periélio de Mercúrio descoberto por Leverrier (tal como ele se apresenta depois de feitas as correcções de perturbação). Este facto, tendo em vista que as equações foram estabelecidas por via puramente matemática a partir do postulado da relatividade geral, constitui, na minha opinião, testemunho convincente de que a teoria é válida do ponto de vista físico.

---

* Em rigor esta afirmação só pode fazer-se para o tensor $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta})$, onde λ é uma constante. Mas, se igualarmos a zero este tensor, obteremos outra vez as equações $B_{\mu\nu} = 0$.

§ 15. *A função de Hamilton para o campo gravítico. Lei da impulsão-energia*

Para mostrar que as equações de campo correspondem à lei da impulsão-energia é da maior conveniência escrevê-las na seguinte forma de Hamilton:

$$
\text{(47a)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\delta\left\{\int H d\tau\right\} = 0 \\
&H = g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \\
&\sqrt{-g} = 1
\end{aligned}
\right.
$$

entendendo-se que as variações se desvanecem nos limites do espaço quadridimensional de integração limitado que se considera.

Comecemos por mostrar que a forma (47a) é equivalente às equações (47). Para esse efeito, consideremos H como função dos $g^{\mu\nu}$ e dos

$$g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right).$$

Temos então, em primeiro lugar,

$$
\begin{aligned}
\delta H &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\,\delta g^{\mu\nu} + 2 g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \\
&= -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\,\delta g^{\mu\nu} + 2\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Mas agora

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right) = -\tfrac{1}{2}\,\delta\left[g^{\mu\nu}\,g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_\lambda}\right)\right]$$

Os termos provenientes das duas últimas parcelas do parêntese curvo convertem-se um no outro trocando o sinal e permutando os índices μ e β (e atendendo a que a denominação dos índices de soma pode ser modificada livremente). Na expressão de δH os referidos termos aparecem multiplicados por $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ e por isso cancelam-se mùtuamente, visto que $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ é simétrica em relação a μ e β. Resta, portanto, para ser considerado, apenas o primeiro termo do parêntese curvo, pelo que se obtém, atendendo a (31).

$$\delta H = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha},$$

e portanto

$$\text{(48)} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} &= -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \\ \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} &= \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right.$$

Ora o cálculo da variação que figura em (47a) leva ao sistema de equações [8])

$$\text{(47b)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0.$$

Este sistema, em vista de (48), coincide com (47), como se queria demonstrar.

Multipliquemos agora (47b) por $g^{\mu\nu}_{\sigma}$. Como

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}$$

e, consequentemente,

$$g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}{\partial x_{\sigma}},$$

obteremos com essa multiplicação a equação

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_\sigma} = 0$$

ou *

$$(49) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial t^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha} &= 0 \\ -2\varkappa t^\alpha_\sigma &= g^{\mu\nu}_\sigma \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha} - \delta^\alpha_\sigma H, \end{aligned} \right.$$

sendo ainda, em vista de (48), da segunda equação de (47a), e de (34),

$$(50) \qquad \varkappa t^\alpha_\sigma = \frac{1}{2}\delta^\alpha_\sigma g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma}.$$

É de salientar que t^α_σ não é um tensor, mas que, apesar disso, a equação (49) é válida em todos os sistemas de coordenadas para os quais seja $\sqrt{-g} = 1$. Esta equação exprime a lei da conservação da quantidade de movimento e da energia para o campo gravítico. Com efeito, a sua integração estendida a um volume V *tridimensional* fornece-nos as quatro equações

$$(49a) \qquad \frac{\partial}{dx_4}\left\{\int t^4_\sigma \, dV\right\} = \int \left(t^1_\sigma a_1 + t^2_\sigma a_2 + t^3_\sigma a_3\right) dS$$

onde a_1, a_2, a_3, representam os co-senos directores da normal, dirigida para o interior, a um elemento de superfície de grandeza dS (no sentido da geometria euclidiana) pertencente à fronteira do volume de integração. Reconhece-se

* A razão por que se introduz o factor $-2\varkappa$ será apresentada mais tarde.

aqui a expressão das leis de conservação na sua forma habitual. Designaremos as grandezas t^{α}_{σ} por «componentes de energia» do campo gravítico.

Vou agora apresentar ainda as equações (47) numa terceira forma que é particularmente útil para uma apreensão viva do nosso assunto. Multiplicando as equações de campo (47) por $g^{\nu\sigma}$, obtemo-las em forma «mista». Note-se agora que

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right) - \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu},$$

grandeza que, em vista de (34) é igual a

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) - g^{\nu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\sigma\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu},$$

ou (modificando a denominação dos índices de soma) igual a

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}) - g^{mn}\Gamma^{\sigma}_{m\beta}\Gamma^{\beta}_{n\mu} - g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}.$$

O terceiro termo desta expressão cancela-se com o que provém do segundo termo das equações de campo (47); e usando a relação (50) podemos substituir o segundo termo da expressão por

$$\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right)$$

onde se tomou $t = t^{\alpha}_{\alpha}$. Obteremos assim, em vez das equações (47),

$$(51)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha}}(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}) = -\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right) \\ \sqrt{-g} = 1. \end{array}\right.$$

§ 16. *Forma geral das equações de campo da gravitação*

As equações de campo estabelecidas no parágrafo precedente para espaços livres de matéria correspondem à equação de campo

$$\Delta \varphi = 0$$

da teoria de Newton. Temos agora de procurar a equação que corresponde à equação de Poisson

$$\Delta \varphi = 4 \pi \varkappa \rho,$$

na qual ρ representa a densidade da matéria.

A teoria da relatividade especial levou à conclusão de que a massa inerte mais não é do que energia, cuja expressão matemática completa se encontra num tensor simétrico de segunda ordem — o tensor energia. Isto indica-nos que também na teoria da relatividade geral nós teremos de introduzir um tensor energia da matéria, T_σ^α, o qual há-de ter carácter misto, como as componentes t_σ^α da energia do campo gravítico [equações (49) e (50)], mas há-de corresponder a um tensor simétrico covariante *.

Quanto à maneira de introduzir nas equações do campo gravítico o referido tensor (correspondente à densidade ρ na equação de Poisson), temos para isso uma indicação nas equações do sistema (51). Consideremos, com efeito, um sistema completo (por exemplo, o sistema solar): a massa total desse sistema, e portanto também o seu efeito gravítico global, deve depender da energia total do sistema, ou seja, das suas energias ponderável e gravítica em conjunto. Isto expri-

---

* $g_{\alpha\tau} \, T_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau}$ e $g^{\sigma\beta} \, T_\sigma^\alpha = T^{\alpha\beta}$ devem ser tensores simétricos.

mir-se-á introduzindo nas equações (51), em vez das componentes de energia t^{σ}_{μ}, que sòmente se referem ao campo gravítico, as somas $t^{\sigma}_{\mu} + T^{\sigma}_{\mu}$ das componentes de energia do campo gravítico e da matéria. Deste modo, em vez de (51), obtém-se a equação tensorial

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right) = -\varkappa\left[\left(t^{\sigma}_{\mu} + T^{\sigma}_{\mu}\right) - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}\left(t + T\right)\right] \\ \sqrt{-g} = 1, \end{array} \right.$$

onde se pôs $T = T^{\mu}_{\mu}$ (escalar de Laue). São estas, em forma mista, as equações gerais de campo da gravitação que procurávamos.

Destas equações pode obter-se, seguindo uma marcha inversa daquela que nos fez chegar a (51), o seguinte sistema, que substitui (47):

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \\ \sqrt{-g} = 1. \end{array} \right.$$

Deve salientar-se que o postulado da relatividade não é, só por si, suficiente para justificar a atribuição de um tensor energia à matéria; e foi por isso que, ao fazermos atrás a introdução desse tensor, a baseámos na hipótese de que a energia do campo da gravidade e a energia de qualquer outra espécie actuam gravìticamente de igual modo. Mas a razão mais forte para que aceitemos as equações precedentes está em que elas acarretam a seguinte consequência, como se vai mostrar no § 17: para as componentes da energia total vigoram equações de conservação (da quantidade de movimento e da energia) correspondentes exactamente às equações (49) e (49a).

§ 17. *As leis de conservação no caso geral*

É fácil transformar a equação (52) para fazer desaparecer o segundo termo do seu segundo membro. Efectuemos para isso em (52) uma contracção relativamente aos índices μ e σ; multipliquemos por $\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu$ a equação que assim se obtém, e subtraiamo-la depois de (52). Resulta

$$\text{(52a)} \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \tfrac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right) = -\varkappa\left(t^\sigma_\mu + T^\sigma_\mu\right).$$

Apliquemos a esta equação a operação $\partial/\partial x_\sigma$. Começando pelo primeiro termo do primeiro membro, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

A primeira e a terceira parcela deste parêntese curvo contribuem para o resultado, com termos que se cancelam mùtuamente, como imediatamente se reconhece se na contribuição dada pela terceira parcela se permutarem, por um lado, os índices de soma α e σ, e por outro os índices de soma β e λ. Resta então o termo proveniente da segunda parcela. Transformando-o por aplicação de (31), vem então como resultado da aplicação da operação $\partial/\partial x_\sigma$ ao primeiro termo do primeiro membro da (52a)

$$\text{(54)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}.$$

Quanto ao segundo termo do mesmo primeiro membro, ele dá directamente

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right),$$

ou $$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Mas o termo formado com a última parcela deste parêntese curvo desaparece no sistema de coordenadas que estamos a empregar, como se reconhece considerando (29). E os dois restantes termos podem ser reunidos num só, dando, em virtude de (31),

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}.$$

Combinando este resultado com (54), vê-se então que a aplicação da operação $\partial/\partial x_\sigma$ ao primeiro membro de (52a) conduz à identidade

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\rho\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right) \equiv 0. \tag{55}$$

E então a aplicação da operação $\partial/\partial x_\sigma$ à equação (52a) conduz finalmente a

$$\frac{\partial\left(t_\mu{}^\sigma + T_\mu{}^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{56}$$

Daqui se conclui que as nossas equações de campo para a gravitação implicam o cumprimento das leis de conservação da quantidade de movimento e da energia. Reconheceremos isso com a maior facilidade se retomarmos o raciocínio que nos conduziu de (49) a (49a), com a diferença, porém, de que agora teremos de tomar, em vez das componentes t^σ_μ da energia do campo gravítico, as componentes da energia total da matéria e campo gravítico.

§ 18. *A lei da impulsão-energia para a matéria considerada como consequência das equações de campo*

Multiplicando (53) por $\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma$, obtém-se, com o método introduzido no § 15, e tendo em conta o anulamento de

$$g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \quad ^{9)}$$

a equação

$$\frac{\partial t^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0,$$

ou, atendendo a (56),

$$\frac{\partial T^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}} T_{\mu\nu} = 0. \tag{57}$$

O confronto com (41b) mostra que esta equação, com a escolha de coordenadas que adoptámos, outra coisa não é senão a expressão do anulamento da divergência do tensor formado pelas componentes energéticas da matéria. Do ponto de vista físico, a presença do segundo termo do primeiro membro mostra que em rigor a lei da conservação da quantidade de movimento e energia não é válida quando se considera a matéria só, ou antes, só é válida nesse caso desde que os $g^{\mu\nu}$ sejam constantes, isto é, desde que se desvaneçam as intensidades de campo da gravitação. Este segundo termo exprime, consoante as coordenadas, ou a quantidade de movimento que é transferida do campo gravítico para a matéria, por cada unidade de volume, ou a energia que é transferida por cada unidade de tempo. Isto ressalta com maior clareza ainda se, por sugestão de (41), escrevermos (57) na forma

$$\frac{\partial T^{\alpha}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} = -\Gamma_{\sigma\beta} T^{\alpha}_{\beta}. \tag{57a}$$

Assim escrito, o segundo membro exprime o efeito energético do campo gravítico sobre a matéria.

Em face do exposto, vemos que as equações de campo da gravitação contêm quatro condições, às quais o processo material tem que satisfazer simultâneamente. Tais condições determinam completamente as equações que regem o processo, caso ele possa ser caracterizado por quatro equações diferenciais mùtuamente independentes *.

D. Os processos «materiais»

Os instrumentos matemáticos desenvolvidos em *B* proporcionam-nos a possibilidade de, sem ter de recorrer a outros meios, proceder a um alargamento dos enunciados das leis físicas da matéria (hidrodinâmica, electrodinâmica de Maxwell) — tal como são formulados na teoria da relatividade especial — com o fim de os adaptar à teoria da relatividade geral. Com essa adaptação, o que se vai obter não é uma nova limitação de possibilidades imposta pelo princípio da relatividade geral, mas sim um conhecimento exacto da influência que o campo gravítico exerce sobre todos os processos, e isto independentemente da introdução de qualquer nova hipótese.

Pôr o problema deste modo implica que não se introduzam como necessárias hipóteses concretas a respeito da natureza física da matéria (tomada no seu sentido restrito). Pode em particular ficar em aberto a questão de se saber se as teorias dos campos electromagnético e gravítico formam ou não, no seu conjunto, uma base suficiente para a teoria da matéria. O postulado da relatividade geral nada pode, em princípio, ensinar-nos a este respeito. Será o desenvolvimento da teoria que há-de revelar se as doutrinas electromagnética e da gravitação serão capazes de realizar, em conjunto, aquilo que a primeira não foi capaz de realizar sòzinha.

* Sobre este assunto consulte D. Hilbert, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1915, pág. 3.

§ 19. *Equações de Euler para fluidos adiabáticos desprovidos de atrito*

Sejam p e ρ dois escalares, ao primeiro dos quais chamaremos «pressão» e ao segundo «densidade» de um fluido; e suponhamos que eles estão relacionados por uma equação. Suponhamos ainda que o tensor contravariante da energia do fluido é o tensor simétrico contravariante

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} p + \rho \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds}. \tag{58}$$

Corresponde-lhe o tensor covariante

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} p + g_{\mu\alpha} \frac{dx_\alpha}{ds} g_{\nu\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \rho, \tag{58a}$$

assim como o tensor misto *

$$T_\sigma^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta} \frac{dx_\beta}{ds} \frac{dx_\alpha}{ds} \rho. \tag{58b}$$

Introduzindo o segundo membro de (58b) em (57a), obtêm-se as equações hidrodinâmicas de Euler da teoria da relatividade geral. Estas equações dão, em princípio, uma solução completa ao problema do movimento; porque as quatro equações (57a), conjuntamente com a equação dada entre p e ρ e ainda com a equação

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 1,$$

---

* Para um observador que seja arrastado no movimento e que, no infinitamente pequeno, utilize, no sentido da relatividade especial, um sistema de referência, a densidade de energia T_4^4 é igual a $\rho - p$. É aqui que assenta a definição de ρ. Deste modo ρ não é constante para um fluido incompressível.

são suficientes, dados os $g_{\alpha\beta}$, para determinar as 6 incógnitas

$$p, \rho, \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \frac{dx_4}{ds}.$$

Se os $g_{\mu\nu}$ forem também desconhecidos, será necessário lançar ainda mão das equações (53). Como estas são em número de 11 e as funções $g_{\mu\nu}$ são só 10, parece à primeira vista haver superabundância de condições, mas há que ter em conta que as equações (57a) estão já incluídas entre as (53), de modo que estas, no sistema, representam apenas 7 equações independentes. O que resta, pois, é uma indeterminação, que é aliás bem fácil justificar: é que a larga liberdade de que se dispõe para escolher as coordenadas introduz no problema um tal grau de indeterminação matemática, que se torna possível escolher arbitràriamente três das funções espaciais *.

§ 20. *Equações electromagnéticas de Maxwell para o vazio*

Sejam φ_ν as componentes de um quadrivector covariante, o quadrivector do potencial electromagnético. Seguindo (36), formemos com elas as componentes $F_{\rho\sigma}$ do sextivector covariante do campo electromagnético, mediante o sistema de equações

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

---

* Renunciando à escolha de coordenadas obrigada a $g = -1$ ficam *quatro* funções espaciais disponíveis para a liberdade de escolha, correspondentes às quatro funções arbitrárias de que se pode dispor livremente para estabelecer as coordenadas.

O sistema (59) implica que seja satisfeito o sistema

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0, \tag{60}$$

cujo primeiro membro é, em conformidade com (37), um tensor anti-simétrico de terceira ordem. O sistema (60) é, portanto, formado essencialmente por quatro equações, que se explicitam do modo seguinte:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{60a}$$

Este sistema de equações corresponde ao segundo sistema de equações de Maxwell. Isso reconhece-se imediatamente pondo

$$\left\{\begin{aligned} F_{23} &= \mathfrak{h}_x & F_{14} &= \mathfrak{e}_x \\ F_{31} &= \mathfrak{h}_y & F_{24} &= \mathfrak{e}_y \\ F_{12} &= \mathfrak{h}_z & F_{34} &= \mathfrak{e}_z. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

Poderemos então, empregando a notação habitual da análise vectorial de três dimensões, escrever em vez de (60a)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{e} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{h} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{60b}$$

O primeiro sistema de Maxwell obtém-se por generalização da forma dada por Minkowski. Introduziremos para isso o seguinte sextivector contravariante correspondente a $F_{\alpha\beta}$

(62) $$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

e igualmente o quadrivector contravariante J^{μ} da densidade de corrente eléctrica no vazio. Em vista de (40), o seguinte sistema de equações é então invariante para substituições arbitrárias que tenham determinante igual a 1 (em conformidade com a escolha de coordenadas que resolvemos adoptar):

(63) $$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = J^{\mu}.$$

Pondo, com efeito,

(64) $$\begin{cases} F^{23} = \mathfrak{h}'_x & F^{14} = -\mathfrak{e}'_x \\ F^{31} = \mathfrak{h}'_y & F^{24} = -\mathfrak{e}'_y \\ F^{12} = \mathfrak{h}'_z & F^{34} = -\mathfrak{e}'_z, \end{cases}$$

grandezas que, no caso particular da teoria da relatividade especial, são iguais a $\mathfrak{h}_x \ldots \mathfrak{e}_z$, e além disso

$$J^1 = \mathfrak{i}_x, \quad J^2 = \mathfrak{i}_y, \quad J^3 = \mathfrak{i}_z, \quad J^4 = \rho,$$

obtém-se, em vez de (63),

(63a) $$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathfrak{h}' - \dfrac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t} = \mathfrak{i} \\ \operatorname{div} \mathfrak{e}' = \rho. \end{cases}$$

As equações (60), (62) e (63) constituem, assim, a generalização das equações de campo de Maxwell para o vazio e com a convenção que adoptámos para a escolha das coordenadas.

As componentes de energia do campo electromagnético. Formemos o produto interno

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} J^\mu. \tag{65}$$

Em notação tridimensional as suas componentes exprimir-se-ão, em conformidade com (61), do modo seguinte:

$$\left\{\begin{array}{l} \varkappa_1 = \rho e_x + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varkappa_4 = -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}). \end{array}\right. \tag{65a}$$

$\varkappa_\sigma$ é um quadrivector covariante cujas componentes são iguais à quantidade de movimento negativa, ou à energia que, por unidade de tempo, ou de volume, respectivamente, são transferidas das massas eléctricas para o campo electromagnético. Se as massas eléctricas forem livres, isto é, se não estiverem sujeitas senão à influência do campo electromagnético, então o quadrivector covariante $\varkappa_\sigma$ torna-se nulo.

Para obtermos as componentes de energia T_σ^ν do campo electromagnético não temos mais que dar à equação $\varkappa_\sigma = 0$ a forma da equação (57). De (63) e (65) resulta directamente

$$\varkappa_\sigma = F_{\alpha\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}) - F^{\mu\rho} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

O último termo consente, em virtude de (60), a transformação

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

podendo ainda a última expressão, por razões de simetria, ser escrita na forma

$$-\frac{1}{4} \left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu} \right],$$

à qual podemos ainda dar a forma

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu})+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}).$$

O primeiro destes termos escreve-se abreviadamente

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu};$$

o segundo dá, depois de se efectuar a diferenciação e de algumas transformações

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Reunindo os três termos calculados, obtém-se a relação

$$(66)\qquad \varkappa_\sigma=\frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\tau^\nu,$$ onde

$$(66a)\qquad T_\sigma^\nu=-F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha}+\frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

Em virtude de (30), a equação (66) é equivalente a (57) ou a (57a) quando $\varkappa_\sigma$ se reduz a zero. Os T_σ^ν são por isso as componentes de energia do campo electromagnético. Com o auxílio de (61) e (64) mostra-se fàcilmente que estas componentes conduzem às bem conhecidas expressões de Maxwell-Poynting no caso da teoria da relatividade especial.

Até agora fizemos a dedução das leis gerais a que obedecem a matéria e o campo gravítico utilizando sempre um sistema de coordenadas para o qual $\sqrt{-g}=1$. Conseguimos assim considerável simplificação nas fórmulas e cálculos, sem deixar de satisfazer à exigência da covariância geral: e isto porque foi a partir de equações de covariância geral que, por particularização do sistema de coordenadas, encontrámos as nossas equações.

Não deixa de ter interesse formal a questão de se saber se, sem essa particularização de coordenadas, mas com uma definição correspondentemente mais geral para as componentes energéticas do campo gravítico e da matéria, não teriam validade leis de conservação com a forma da equação (56), bem como equações de campo da gravitação do género das equações (52) ou (52a), de tal modo que no primeiro membro figurasse uma divergência (no significado habitual) e no segundo membro a soma das componentes energéticas da matéria e da gravitação. Eu cheguei efectivamente à conclusão de que a resposta é afirmativa para os dois casos. Julgo, porém, que não tem interesse apresentar uma exposição mais ampla dessas minhas reflexões sobre o assunto, visto que nada de verdadeiramente novo brota delas.

§ 21. *A teoria de Newton como uma primeira aproximação*

Como já temos dito diversas vezes, a teoria da relatividade especial caracteriza-se, como caso particular da teoria geral, pelo facto de os $g_{\mu\nu}$ fomarem os valores constantes (4). Mas, como também já foi dito atrás, tomar tais valores significa desprezar inteiramente os efeitos da gravidade. Situar-nos-emos mais perto da realidade se admitirmos que os $g_{\mu\nu}$ têm valores diferentes de (4), sendo porém os respectivos desvios de tal modo pequenos (em confronto com 1) que se podem desprezar as grandezas de grau igual ou superior a 2 que se formem com eles. (Primeiro ponto de vista da aproximação.)

Além desta hipótese sobre os valores dos $g_{\mu\nu}$, vamos admitir mais o seguinte: que no domínio espaço-temporal considerado os $g_{\mu\nu}$ tendem para os valores (4) quando as coordenadas de espaço tendem para o infinito, desde que a escolha das coordenadas se faça de modo adequado: o que equivale a dizer que os campos de gravidade que se vão considerar serão exclusivamente campos criados por matéria situada no domínio do finito.

Pode dizer-se que é destas aproximações que vai resultar a teoria de Newton; mas, para chegar a ela, é ainda necessário introduzir um segundo ponto de vista no método aproximado de manipulação das equações fundamentais.

Consideremos o movimento de um ponto material segundo (46). No caso da teoria da relatividade especial as componentes

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

podem tomar quaisquer valores; o que significa ser possível qualquer velocidade

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}$$

contanto que seja inferior à velocidade da luz no vazio ($v < 1$). Se nos limitarmos, porém, ao caso de v ser pequena em confronto com a velocidade da luz — e é esse o caso quase exclusivo da experiência — então as componentes

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

deverão ser tratadas como quantidades pequenas, ao passo que dx_4/ds se deve considerar, até à segunda ordem de grandeza, igual a 1. (Segundo ponto de vista da aproximação.)

Notemos agora que, segundo o primeiro ponto de vista da aproximação, as grandezas $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ são todas quantidades pequenas, de primeira ordem pelo menos. Basta então olhar para (46) para reconhecer que, em obediência ao segundo ponto de vista da aproximação, só são de considerar os termos para os quais $\mu = \nu = 4$. Procedendo assim, as equações (46) simplificam-se, convertendo-se nas seguintes (que representam o que resta quando nos limitamos aos termos de ordem mais baixa):

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = \Gamma^{\tau}_{44},$$

onde se tomou $ds = dx_4 = dt$. Se agora, no cálculo dos Γ^{τ}_{44}, conservarmos apenas os termos que, segundo o primeiro ponto de vista da aproximação, são de primeira ordem, as equações anteriores reduzir-se-ão às seguintes

$$\frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = \begin{bmatrix} 44 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (\tau = 1, 2, 3)$$

$$\frac{d^2 x_4}{dt^2} = -\begin{bmatrix} 44 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Se, além disso, admitirmos que o campo de gravidade é quase-estático, limitando-nos assim a considerar casos em que a matéria geradora do campo só lentamente se pode mover (em confronto com a velocidade de propagação da luz), então no cálculo dos segundos membros das últimas equações poderemos desprezar derivadas em ordem ao tempo perante as derivadas em ordem às coordenadas de posição. Restará então

$$(67) \qquad \frac{d^2 x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1, 2, 3).$$

Estas equações são as do movimento do ponto material na teoria de Newton, desempenhando $g_{44}/2$ o papel do potencial de gravidade. O que há de notável neste resultado é o facto de bastar a componente g_{44} do tensor fundamental para determinar, em primeira aproximação, o movimento do ponto material.

Passemos agora às equações de campo (53).

Aqui há que ter em conta que o tensor energia da «matéria», considerada em sentido lato, é determinado quase exclusivamente pela densidade ρ da matéria considerada em sentido estrito, isto é, pelo segundo termo do segundo membro de (58) [ou (58a), para o tensor covariante, ou (58b), para o misto]. Dentro da aproximação que nos interessa, todas as suas componentes se reduzem a zero excepto $T_{44} = \rho = T$.

Quanto ao primeiro membro de (53), deve notar-se que o seu segundo termo é uma quantidade pequena de segunda ordem; e que o primeiro dá, dentro da aproximção que nos interessa,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\3\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\nu\\4\end{bmatrix},$$

o que dá, tomando $\mu = \nu = 4$ e desprezando derivadas em ordem ao tempo

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

A quarta das equações (53) dá pois

$$\Delta g_{44} = \varkappa \rho. \tag{68}$$

As equações (67) e (68) são, em conjunto, equivalentes à lei newtoniana da gravitação.

Dessas equações [(67) e (68)] resulta, para o potencial gravítico, a expressão

$$(68a) \qquad -\frac{\varkappa}{8\pi}\int \frac{\rho\, d\tau}{r},$$

enquanto que a teoria de Newton dá, para a unidade de tempo que escolhemos,

$$-\frac{K}{c^2}\int \frac{\rho\, d\tau}{r},$$

onde K representa a constante $6{,}7 \cdot 10^{-8}$, habitualmente denominada constante de gravitação. Confrontando as duas expressões, vem

$$(69) \qquad \varkappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}.$$

§ 22. *Comportamento de réguas e relógios no campo de gravidade estático. Curvatura dos raios de luz. Movimento do periélio das órbitas dos planetas*

Para chegarmos à teoria de Newton como primeira aproximação, apenas tivemos necessidade de calcular g_{44} entre as 10 componentes $g_{\mu\nu}$ do campo gravítico, por ser ela a única dessas componentes que entra na equação (67), primeira aproximação da equação do movimento do ponto material. Mas daqui já se deixa ver que há ainda outras componentes entre os $g_{\mu\nu}$ cujos valores se devem desviar em primeira aproximação dos valores dados em (4): porque tal desvio é exigido pela condição $g = -1$.

Se o ponto material gerador do campo se encontra situado na origem do sistema de coordenadas, obtém-se, em primeira aproximação, a seguinte solução de simetria radial

$$(70) \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \dfrac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \ (\rho \text{ e } \sigma \text{ entre 1 e 3}) \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \ (\rho \text{ entre 1 e 3}) \\ g_{44} = 1 - \dfrac{\alpha}{r} \end{array} \right.$$

tendo $\delta_{\rho\sigma}$ o valor 1 ou o valor 0, consoante for, respectivamente $\rho = \sigma$ ou $\rho \neq \sigma$; e sendo r a grandeza

$$+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Em vista de (68a),

$$(70a) \qquad \alpha = \frac{\varkappa M}{4\pi}$$

se designarmos por M a massa que gera o campo. É fácil verificar que esta solução satisfaz em primeira aproximação as equações de campo (no exterior da massa).

Vamos agora investigar a influência que o campo da massa M exerce sobre as propriedades métricas do espaço. Continua a ser válida a relação

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

que existe entre os comprimentos e tempos medidos «localmente», ds, de um lado, e as diferenças de coordenadas, dx_ν, do outro.

Se uma régua unidade estiver, por exemplo, colocada em posição «paralela» ao eixo x, tomaremos $ds^2 = -1$; $dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0$,
e será portanto $\qquad -1 = g_{11}\, dx_1^2$.

Se a régua unidade estiver assente no eixo do x, verifica-se, além da relação anterior, ainda a seguinte, dada pela primeira das equações (70)

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Destas duas relações resulta, com o rigor da primeira aproximação,

$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

Vê-se assim que a régua unidade, quando está colocada radialmente no campo gravítico, apresenta em relação ao sistema de coordenadas, em consequência da existência do campo, um encurtamento, cujo valor é o que acabámos de encontrar.

De um modo análogo se pode obter o comprimento da régua expresso nas coordenadas, quando ela estiver colocada em direcção tangencial. Pondo, por exemplo,

$$ds^2 = -1; \quad dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0; \quad x_1 = r, x_2 = x_3 = 0,$$

resulta

$$-1 = g_{22}\, dx_2{}^2 = -dx_2{}^2, \tag{71a}$$

o que mostra que o campo de gravidade do ponto material não tem qualquer influência sobre o comprimento da régua quando esta é colocada em posição tangencial.

Concluí-se então que a geometria euclidiana deixa de ser válida, mesmo em primeira aproximação, no campo da gravidade, se quisermos continuar a considerar a mesma régua, independentemente da sua localização ou orientação, como materialização de um mesmo segmento de recta. No entanto, basta olhar para (70a) ou para (69) para reconhecer que os desvios que se podem esperar em relação a essa geometria são demasiado pequenos para poderem ser revelados por medições feitas na superfície da Terra.

Investiguemos agora o ritmo de funcionamento de um relógio unidade que se encontra em repouso num campo gravítico estático. Para um período de funcionamento do relógio tem-se

$$ds = 1; \quad dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

E portanto

$$1 = g_{44}\, dx_4^2;$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2} \quad \text{ou}^{10)}$$

$$(72) \qquad dx_4 = 1 + \frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\rho\, d\tau}{r}.$$

O relógio funciona, pois, com maior lentidão quando está colocado na proximidade de massas ponderáveis. Daqui resulta que as riscas espectrais da luz que nos chega da superfície de grandes astros devem apresentar-se desviadas para o extremo vermelho do espectro *.

Vamos ainda fazer o estudo da marcha dos raios luminosos no campo gravítico estático. Segundo a teoria da relatividade especial a velocidade da luz é dada pela equação

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

e, então, segundo a teoria da relatividade geral será dada pela equação

$$(73) \qquad ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0.$$

---

* Segundo E. Freundlich, há observações espectrais sobre estrelas fixas de certos tipos que testemunham a existência dum efeito deste género. No entanto, está ainda por encontrar uma prova definitiva desta consequência.

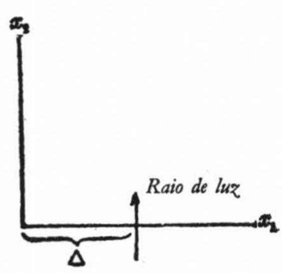
Se for dada a direcção, isto é, a razão $dx_1 : dx_2 : dx_3$, a equação (73) dá as quantidades

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4},$$

e, portanto, a velocidade

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma,$$

definida no sentido da geometria euclidiana. Reconhece-se fàcilmente que a marcha dos raios de luz em relação ao sistema de coordenadas tem de ser curvilínea quando os $g_{\mu\nu}$ não forem constantes. Se n for uma direcção perpendicular à direcção de propagação da luz, o princípio de Huyghens mostra que o raio de luz [considerado no plano (γ, n)] tem a curvatura $-\frac{\partial\gamma}{\partial n}$ [11]).



Vamos procurar determinar a curvatura que um raio de luz adquire quando passa à distância Δ de uma massa M. Se escolhermos o sistema de coordenadas em conformidade com o esquema ao lado, a deflexão total B do raio de luz (considerada positiva quando a concavidade ficar voltada para a origem) é dada com suficiente aproximação por

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2,$$

enquanto que (73) e (70) dão [12])

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Efectuando o cálculo do integral, chega-se a [13])

$$(74) \qquad B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}.$$

Um raio de luz que passe próximo do Sol sofre, deste modo, uma deflexão de 1,7″, e um raio que passe junto de Júpiter sofre uma deflexão de uns 0,02″.

Se calcularmos o campo gravítico com uma aproximação maior, e se, com rigor correspondente, calcularmos também o movimento planetário de um ponto material cuja massa se possa considerar, em valor relativo, infinitamente pequena, encontraremos, em relação às leis de Kepler-Newton referentes aos movimentos planetários, um desvio que se traduz no seguinte: a órbita elíptica do planeta efectua, no sentido do movimento de revolução do planeta, uma lenta rotação, cujo valor angular por revolução é o seguinte:

$$(75) \qquad \varepsilon = 24\,\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}.$$

Nesta fórmula, a designa o semieixo maior, c o habitual valor da velocidade da luz, e a excentricidade, T o tempo de revolução em segundos *.

Para a rotação da órbita do planeta Mercúrio o cálculo dá um valor de 43″ por século, em correspondência exacta com os resultados dos astrónomos (Leverrier): estes, com efeito, tinham reconhecido haver no movimento do periélio de Mercúrio uma parte que não podia ser atribuída a perturbações causadas por outros planetas, e que essa parte tinha o valor que acabámos de indicar.

---

* Para o cálculo deve o leitor consultar os artigos originais: A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1915, pág. 831; K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1916, pág. 189.

Notas do Tradutor

1) O primeiro termo, $g^{\mu\nu}\frac{\partial A\mu}{\partial x_\nu}$, é transformado em

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu} A\mu) - A\mu \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}$$

2) No texto alemão figura na terceira parcela $g^{\mu\nu}$ em vez de $g^{\tau\alpha}$.

3) A redução é feita depois de o referido terceiro termo sofrer uma transformação análoga à mencionada na nota (1).

4) Depois de multiplicado por $g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}$.

5) No texto alemão aparece $R^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ em vez de $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$, certamente por lapso.

6) Neste caso, portanto, o tensor de Riemann não deve reduzir-se a zero, de contrário haveria a possibilidade de tal transformação, como se explicou no § 12.

7) No fim do § 12.

8) Estas equações («de Euler») constituem, como mostra o cálculo das variações, condição necessária e suficiente de estacionaridade do integral que figura em (47a).

9) Em virtude de (29) e de $\sqrt{-g} = 1$.

10) O potencial gravítico é dado por (68a) e também por $g_{44}/2$ adicionado de qualquer constante (neste caso $-1/2$).

11) Entende-se aqui por «curvatura» o ângulo de deflexão por unidade de percurso (veja o artigo precedente «Sobre a influência da gravidade na propagação da luz», § 4).

12) Para este cálculo, depois de substituir em (73) os valores dos vários $g_{\mu\nu}$ dados por (70) e de introduzir γ^2 na expressão obtida, há que tomar $dx_3/dx_4 = 0$, e que desprezar, por muito pequenos, termos em que entra a derivada dx_1/dx_4.

13) Para a integração convém a mudança de váriavel $x_2 = \Delta\, tg\varphi$.

O PRINCÍPIO DE HAMILTON E A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL *

H. A. Lorentz e D. Hilbert conseguiram recentemente ** dar à teoria da relatividade geral uma forma particularmente acessível, porquanto fizeram derivar as respectivas equações ùnicamente de um princípio de variação. Assim se vai fazer também no presente artigo. O objectivo que tenho em vista, ao escrevê-lo, é estabelecer as relações fundamentais com a maior limpidez possível e com toda a generalidade que o ponto de vista da relatividade geral permitir. Evitarei em especial, na medida do possível, introduzir hipóteses particulares referentes à constituição da matéria, em contraste principalmente com a exposição de Hilbert. Por outro lado, e ao contrário do que sucedeu no meu último trabalho sobre este assunto, a escolha do sistema de coordenadas ficará aqui inteiramente livre.

§ 1. O princípio de variação e as equações de campo da gravitação e da matéria

Façamos, como habitualmente, a descrição do campo gravítico por meio do tensor dos $g_{\mu\nu}$ *** e a descrição da

* Reproduzido das «Sitzungsberichten der Preußischen Akad. d. Wissenschaften 1916.

** Quatro artigos de H. A. Lorentz nas «Publikationen d. Konink]. Akad. van Wetensch. te Amsterdam», volumes correspondentes a 1915 e 1916, D. Hilbert, «Gött. Nachr.», 1915, caderno 3.

*** O carácter tensorial dos $g_{\mu\nu}$ não será por agora utilizado.

matéria (campo electromagnético inclusive) por meio de um certo número de funções de espaço-tempo $q_{(\rho)}$, cujo carácter teórico de invariância não é para nós relevante. Seja ainda $\mathfrak{H}$ uma função dos

$$g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\right) \text{ e } g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}\left(=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}\,\partial x_{\tau}}\right),$$

e ainda dos

$$q_{(\rho)} \text{ e } q_{(\rho)\alpha}\left(=\frac{\partial q_{(\rho)}}{\partial x_{\alpha}}\right).$$

O princípio de variação

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\}=0 \tag{1}$$

fornece-nos então tantas equações diferenciais quantas forem as funções $g_{\mu\nu}$ e $q_{(\rho)}$ a determinar, desde que se estipule que as grandezas $g^{\mu\nu}$ e $q_{(\rho)}$ são sujeitas a variações independentes umas das outras, e por tal forma que todos os $\delta q_{(\rho)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ e $\frac{\partial \delta g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}$ se desvaneçam nos limites da integração.

Vamos agora admitir que $\mathfrak{H}$ é linear nos $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, não dependendo os coeficientes dos $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ senão dos $g^{\mu\nu}$. Então poderemos substituir o princípio de variação (1) por outro para nós mais cómodo. Com efeito, uma integração parcial adequada conduz-nos a

$$\int \mathfrak{H}\, d\tau=\int \mathfrak{H}^{\bullet}\, d\tau+F, \tag{2}$$

onde F designa um integral sobre a fronteira do domínio considerado, e onde as grandezas $\mathfrak{H}^{\bullet}$ são ainda funções dos

$g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{\sigma}, q_{(\rho)}, q_{(\rho)\alpha}$, mas não já dos $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$. De (2) resulta então, para variações nas condições indicadas,

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}\, d\tau\right\} = \delta\left\{\int \mathfrak{H}^{\bullet}\, d\tau\right\}, \tag{3}$$ [1])

o que permite substituir o nosso princípio de variação (1) pelo seguinte, que é mais cómodo

$$\delta\left\{\int \mathfrak{H}^{\bullet}\, d\tau\right\} = 0. \tag{1a}$$

Efectuando o cálculo da variação segundo os $g^{\mu\nu}$ e segundo os $q_{(\rho)}$, obtêm-se as seguintes equações, como equações de campo da gravitação e da matéria *.

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^{\bullet}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^{\bullet}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^{\bullet}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{H}^{\bullet}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{5}$$

§ 2. *Existência do campo gravítico considerada independentemente da existência de matéria* [2])

Se não se fizerem hipóteses especiais sobre o modo por que $\mathfrak{H}$ depende dos $g^{\mu\nu}, g^{\mu\nu}_{\sigma}, g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}, q_{(\rho)}, q_{(\rho)\alpha}$, as componentes de energia não poderão ser decompostas numa parte correspondente ao campo gravítico e noutra correspondente à matéria.

---

* Para abreviar, omitem-se nas fórmulas os sinais de soma. Sempre que um índice ocorra duas vezes num termo, deve entender-se que se efectua soma sobre ele. Assim, em (4), $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^{\bullet}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)$ representa o termo $\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}^{\bullet}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)$.

Para introduzir esta propriedade na teoria, vamos fazer a hipótese de que

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \tag{6}$$

onde $\mathfrak{G}$ depende só dos $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma}$, $g^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, e $\mathfrak{M}$ só dos $g^{\mu\nu}$, $q_{(\rho)}$, $q_{(\rho)\alpha}$. As equações (4) e (5) 3) tomarão então a forma

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^{\bullet}}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{G}^{\bullet}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_{(\rho)}} = 0. \tag{8}$$

Nestas equações $\mathfrak{G}^{\bullet}$ designa uma grandeza que tem com $\mathfrak{G}$ a mesma relação que $\mathfrak{H}^{\bullet}$ tinha com $\mathfrak{H}$.

Deve ter-se em atenção que as equações (8) ou as (5) teriam de ser substituídas por outras, se quiséssemos considerar o caso de $\mathfrak{M}$, ou $\mathfrak{H}$, respectivamente, dependerem de derivadas dos $q_{(\rho)}$ de ordem superior à primeira. Seria ainda de considerar o caso de os $q_{(\rho)}$ não serem independentes uns dos outros, mas sim ligados entre si por determinadas equações de condição. Mas esses casos não terão interesse para a exposição que se vai fazer, a qual se baseia apenas nas equações (7), que foram obtidas por variação do nosso integral em relação aos $g^{\mu\nu}$.

§ 3. Propriedades das equações de campo da gravitação que resultam da invariância teórica

Vamos agora introduzir a premissa de que

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu \tag{9}$$

é um invariante. Esta premissa fixa o carácter da transformação dos $g_{\mu\nu}$. Quanto ao carácter da transformação dos $q_{(\rho)}$, que fazem a descrição da matéria, não estabeleceremos qualquer hipótese. Admitiremos, porém, que as funções $H = \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{-g}}$, assim como $G = \frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ e $M = \frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{-g}}$ são invariantes em relação a quaisquer substituições de coordenadas de espaço-tempo. Destas premissas deriva a covariância geral das equações (7) e (8) deduzidas de (1) [4]. E resulta também que G deve ser igual (a menos de um factor constante) ao escalar do tensor de curvatura de Riemann; e isto porque não há nenhum outro invariante que possua as propriedades exigidas para G *. Com isto fica também completamente determinado $\mathfrak{G}^{\bullet}$ e, portanto, o primeiro membro da equação de campo (7) **.

Do postulado da relatividade geral derivam certas propriedades da função $\mathfrak{G}^{\bullet}$ que vamos deduzir. Para esse efeito, efectuemos uma transformação infinitesimal das coordenadas, tomando

$$(10) \qquad x'_\nu = x_\nu + \Delta x_\nu$$

onde os Δx_ν são funções infinitamente pequenas das coordenadas, arbitràriamente escolhidas; e os x'_ν são as coordenadas, no novo sistema, do ponto de universo cujas coordenadas no sistema original são x_ν. Do mesmo modo que

---

* É aqui que reside o motivo por que a postulação da relatividade geral conduz a uma teoria da gravitação inteiramente determinada.

** Efectuando a integração parcial obtém-se

$$\mathfrak{G}^{\bullet} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left[\begin{Bmatrix} \mu\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\ \beta \\ \alpha \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\ \beta \\ \beta \end{Bmatrix} \right].$$

Notar que o escalar do tensor de curvatura de Riemann é $g^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ *sendo* $B_{\mu\nu} \left(= B^{\rho}_{\mu\nu\rho} \right)$ *dado pela fórmula* (43) *do artigo da presente obra «Os fundamentos da teoria da Relatividade Geral* (N. T.).

para as coordenadas, também para qualquer outra grandeza ψ tem validade uma lei de transformação do tipo

$$\psi' = \psi + \triangle\psi,$$

podendo $\triangle\psi$ exprimir-se sempre por meio dos $\triangle x_\nu$. Da propriedade de covariância dos $g^{\mu\nu}$ deduzem-se fàcilmente para os $g^{\mu\nu}$ e para os $g^{\mu\nu}_\sigma$ as leis de transformação 5)

$$\triangle g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}\frac{\partial \triangle x_\nu}{\partial x_\alpha} + g^{\nu\alpha}\frac{\partial \triangle x_\mu}{\partial x_\alpha} \tag{11}$$

$$\triangle g^{\mu\nu}_\sigma = \frac{\partial(\triangle g^{\mu\nu})}{\partial x_\sigma} - g^{\mu\nu}_\alpha \frac{\partial \triangle x_\alpha}{\partial x_\sigma}. \tag{12}$$

Como $\mathfrak{G}^*$ só depende dos $g^{\mu\nu}$ e dos $g^{\mu\nu}_\sigma$, é possível calcular $\triangle\mathfrak{G}^*$ com o auxílio de (11) e (12) 6). Obtêm-se assim as equações 7)

$$\sqrt{-g}\,\triangle\left(\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}\right) = S^\nu_\sigma \frac{\partial \triangle x_\sigma}{\partial x_\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 \triangle x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}, \tag{13}$$

onde, para abreviar, se tomou

$$S^\nu_\sigma = 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \mathfrak{G}^*\delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma. \tag{14}$$

Destas duas equações resultam duas consequências, que são importantes para o que se vai seguir.

Sabe-se que $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ é invariante em relação a quaisquer substituições; $\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}$, porém, não o é. Mas é fácil provar que esta última grandeza é invariante em relação a substituições *lineares* das coordenadas. Resulta daqui que o segundo membro de (13) se deve anular sempre que todos os $\frac{\partial^2 \triangle x_\tau}{\partial x_\nu \partial x_\alpha}$ se reduzam a zero. Sendo assim, $\mathfrak{G}^\bullet$ deve verificar a identidade

(15) $$S_\sigma^\nu \equiv 0$$

Se agora escolhermos os $\triangle x_\nu$ de tal modo que eles só sejam diferentes de zero no interior de um dado domínio, desvanecendo-se, porém, na vizinhança infinitesimal da fronteira desse domínio, então o valor do integral de fronteira que aparece na equação (2) não será modificado pela transformação que estamos a considerar pelo que

$$\triangle (F) = 0$$

e portanto * $\triangle \left\{ \int \mathfrak{G} d\tau \right\} = \triangle \left\{ \int \mathfrak{G}^\bullet d\tau \right\}.$

O primeiro membro desta equação deve, porém, ser nulo, visto que tanto $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$ como $\sqrt{-g}\, d\tau$ são invariantes. Sendo assim, também o segundo membro se reduzirá a zero. Atendendo a (13), (14) e (15) [8]) obteremos então directamente a equação

(16) $$\int \frac{\partial \mathfrak{G}^\bullet}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \triangle x_\sigma}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} d\tau = 0.$$

Se transformarmos esta equação, procedendo a uma dupla integração por partes, obteremos a seguinte identidade, atendendo a que os $\triangle x_\sigma$ podem ser escolhidos arbitràriamente [9]):

(17) $$\frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}^\bullet}{\partial g_\alpha^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \right) \equiv 0.$$

---

* Introduzindo as grandezas $\mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G}^\bullet$ em vez de $\mathfrak{H}$ e $\mathfrak{H}^\bullet$.

Das duas identidades (16) e (17), que são provenientes da invariância de $\frac{\mathfrak{G}}{\sqrt{-g}}$, isto é, do postulado da relatividade geral, vamos agora deduzir algumas consequências.

Comecemos por transformar as equações de campo da gravitação, (7), efectuando o seu produto misto por $g^{\mu\sigma}$. Obtêm-se então (permutando os índices σ e ν) as seguintes equações, equivalentes às equações (7)

$$(18) \qquad \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}\right) = -(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + t^\nu_\sigma),$$

onde se tomou

$$(19) \; \mathfrak{T}^\nu_\sigma = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}$$

$$(20) \; t^\nu_\sigma = -\left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}_\alpha} g^{\mu\nu}_\alpha + \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^* \delta^\nu_\sigma - \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\alpha}_\nu} g^{\mu\alpha}_\sigma\right).$$

Esta última expressão de t^ν_σ justifica-se com (14) e (15). Diferenciando (18) em ordem a x_ν e somando sobre ν obtém-se, em vista de (17),

$$(21) \qquad \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}^\nu_\sigma + t^\nu_\sigma) = 0.$$

Esta equação (21) exprime a conservação da quantidade de movimento e da energia [10]). Aos $\mathfrak{T}^\nu_\sigma$ daremos o nome de componentes da energia da matéria, e aos t^ν_σ o de componentes da energia do campo gravítico.

Das equações de campo da gravitação, (7), resulta, multiplicando por $g^{\mu\nu}_\sigma$ e somando sobre μ e ν, e ainda atendendo a (20)

$$\frac{\partial t^\nu_\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}_\sigma \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}} = 0$$

ou, atendendo a (19 e (21)

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} + \frac{1}{2} g_\sigma^{\mu\nu} \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0, \tag{22}$$

onde os $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ representam as grandezas $g_{\nu\sigma} \mathfrak{T}_\mu^\sigma$. Temos assim 4 equações às quais as componentes da energia da matéria têm de satisfazer.

É de pôr em realce que as leis de conservação (21) e (22) (que gozam de covariância geral) tenham sido estabelecidas *ùnicamente* com as equações de campo da gravitação (7) em combinação com o postulado da covariância (relatividade) geral, sem se ter recorrido às equações de campo (8) referentes aos processos materiais.

Notas do Tradutor

1) A hipótese de linearidade permite representar $\mathfrak{H}$ por uma soma da forma $\varphi_{\mu\nu}^{\sigma\rho} g_{\sigma\rho}^{\mu\nu} + \psi$. A aplicação da integração por partes dá

$$\int \mathfrak{H}\, d\tau = \int \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left(\varphi_{\mu\nu}^{\sigma\rho} g_\sigma^{\mu\nu} \right) d\tau - \int g_\sigma^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_{\mu\nu}^{\sigma\rho}}{\partial x_\rho} d\tau + \int \varphi\, d\tau .$$

O primeiro integral do segundo membro é transformável em integral de fronteira (F) pelo teorema de Gauss. O segundo integral é independente dos $g_{\sigma\rho}^{\mu\nu}$ porque os coeficientes φ só dependem dos $g^{\mu\nu}$.

2) No texto alemão, o título deste parágrafo é «Sonderexistenz des Gravitationsfeldes».

3) No texto alemão «(4a)» em vez de «(5)», por lapso.

4) Sendo $\sqrt{-g}\, d\tau = \sqrt{-g}' d\tau'$ é também $\int \mathfrak{H}\, d\tau = \int H \sqrt{-g}\, d\tau = \int H \sqrt{-g}'\, d\tau' = \int \mathfrak{H}'\, d\tau'$.

5) Parte-se de $\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \bar{x}_\nu}{\partial x_\beta}$ e põe-se $\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \triangle g^{\mu\nu}$ e $\bar{x}_k = x_k + \triangle x_k$.

6) No texto alemão: (13) e (14), por lapso.

7) Parte-se de $\triangle \mathfrak{G}^* = \triangle g^{\mu\nu} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} + \triangle g^{\mu\nu}_{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}$, substituem-se $\triangle g^{\mu\nu}$ e $\triangle g^{\mu\nu}_{\sigma}$ pelas suas expressões (11) e (12), e toma-se

$$\sqrt{-g}\,\triangle\left(\frac{\mathfrak{G}^*}{\sqrt{-g}}\right) = \triangle\,\mathfrak{G}^* - \mathfrak{G}^* \frac{\triangle\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\,;$$

$$\triangle\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \cdot g_{\mu\nu} \cdot g \cdot \triangle g^{\mu\nu}$$

(Cf. form. (28) do art. «Fundamentos da Relatividade Geral» da presente obra); e ainda $g_{\mu\nu}\,\triangle g^{\mu\nu} = 2\,\delta^{\nu}_{\sigma} \frac{\partial \triangle x_{\sigma}}{\partial x_{\nu}}$ [em vista de (11)].

8) O texto alemão indica, por lapso, (14), (15), (16).

9) Cada uma das integrações por partes faz aparecer um integral que é transformável, pelo teorema de Gauss, em integral de fronteira. Os dois integrais de fronteira são nulos, em virtude da condição imposta aos $\triangle x_{\nu}$.

10) Ou da «impulsão-energia».

CONSIDERAÇÕES COSMOLÓGICAS SOBRE A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL *

É bem sabido que não basta associar a equação diferencial de Poisson

$$\Delta \varphi = 4 \pi K \rho \tag{1}$$

à equação do movimento do ponto material para se obter um substituto completo para a teoria de acção a distância de Newton: é ainda necessário fazer intervir a condição de o potencial φ tender para um valor limite fixo no infinito espacial. Pois também na teoria da gravitação da relatividade geral acontece uma coisa análoga: se quisermos considerar o universo com extensão espacial infinita, teremos de juntar às equações diferenciais condições nos limites para o infinito espacial.

Quando tratei o problema dos planetas escolhi essas condições nos limites sob a forma da hipótese seguinte: é possível escolher um sistema de referência de tal modo que os potenciais de gravitação $g_{\mu\nu}$ se tornem constantes no infinito espacial. Não é, porém, de modo nenhum evidente «a priori» que seja legítimo estabelecer essas mesmas condi-

---

* Extraído das «Sitzungsberichten der Preußischen Akad. d. Wissenschaften 1917».

ções de limite quando forem maiores as extensões do mundo astral consideradas. Vou apresentar nas páginas seguintes as reflexões que até agora fiz sobre esta importante questão de princípio.

§ 1. *A teoria de Newton*

Como é bem sabido, a condição de limites newtoniana, que atribui a φ um limite constante no infinito espacial, leva a considerar a densidade da matéria nula no infinito. Imaginemos, com efeito, que existe no espaço universal um local (centro) em relação ao qual o campo gravítico da matéria, apreciado em larga escala, possua simetria esférica. Resulta então da equação de Poisson que a densidade média ρ deve tender para zero mais ràpidamente que $\frac{1}{r^2}$, quando aumenta a distância r ao centro, a fim de que φ possa tender para um limite no infinito *.

Neste sentido, o universo segundo Newton é finito, ainda que a sua massa total pòssa ser infinitamente grande.

Daqui resulta, como consequência imediata, que uma parte da radiação emitida pelos corpos celestes abandonará o universo («Weltsystem») de Newton, afastando-se dele radialmente, para se perder, ineficaz, no infinito. Pergunta-se: não poderá essa fuga verificar-se também para os próprios corpos celestes? É difícil negar tal possibilidade. Com efeito, a premissa da existência de um limite finito para φ no infinito espacial implica a possibilidade de um corpo celeste dotado de uma quantidade finita de energia cinética alcançar o infi-

---

* ρ é a densidade média da matéria, estabelecida para um espaço que é grande em confronto com a distância entre estrelas vizinhas, mas é pequeno em comparação com as dimensões da totalidade do sistema estelar.

nito espacial, ultrapassando a barreira que lhe opõem as forças newtonianas de atracção. Segundo a mecânica estatística, ocorrências destas deverão surgir uma vez por outra, enquanto no sistema estelar houver uma energia global suficiente para poder assegurar, quando totalmente transferida para um mesmo corpo celeste, uma viagem deste para o infinito, isto é, uma viagem sem regresso.

Poderíamos tentar escapar a esta singular dificuldade mediante a atribuição de valor muito elevado ao limite para que tende o potencial no infinito. Este caminho seria praticável se não houvesse um condicionamento para o curso do potencial através dos corpos celestes: a ocorrência de diferenças de potencial apreciáveis no campo gravítico tem, na verdade, de ser considerada em contradição com os factos. Bem ao contrário, a tais diferenças de potencial teremos de atribuir uma ordem de grandeza muito pequena, se quisermos que as velocidades estelares deduzidas delas não excedam as que efectivamente se observam.

Se aplicarmos às estrelas a lei de distribuição de Boltzmann, válida para as moléculas gasosas, comparando para esse efeito o sistema estelar a um gás em que o movimento térmico seja estacionário, concluiremos que o sistema estelar não pode existir de forma nenhuma. Com efeito, à diferença de potencial finita existente entre o ponto central e o infinito espacial corresponde, para as densidades, uma razão finita [1]) e, sendo assim, o desvanecimento da densidade no infinito implicaria o desvanecimento da densidade no centro.

Mal se entrevê maneira de resolver tais dificuldades sobre as bases da teoria de Newton. Poderá então perguntar-se se não haverá maneira de as remover modificando a teoria de Newton. Vamos começar por indicar para isso um caminho que, não pretendendo ser um verdadeiro método, servirá, no entanto, de introdução ao que se vai seguir.

Em vez da equação de Poisson, tomemos a seguinte

$$\Delta \varphi - \lambda \varphi = 4 \pi K \rho, \tag{2}$$

onde λ designa uma constante universal. Se for ρ_0 a densidade (uniforme) de uma distribuição de massas, então

$$\varphi = -\frac{4 \pi K}{\lambda} \rho_0 \tag{3}$$

será uma solução da equação (2). Admitamos que seria esta a solução do problema se a matéria das estrelas se distribuísse uniformemente pelo espaço com uma densidade ρ_0, e atribuamos a ρ_0 um valor igual ao da densidade média da distribuição real da matéria no universo. Uma tal solução corresponde a uma expansão até ao infinito do espaço central uniformemente cheio de matéria. Imaginemos agora que a distribuição da matéria se apresenta localmente não uniforme, mantendo-se, porém, o anterior valor da densidade média de distribuição. Virá então sobrepôr-se ao valor constante φ da equação (3) um φ adicional que, na proximidade de massas mais densas, se assemelhará tanto mais a um campo newtoniano, quanto mais pequeno for $\lambda \varphi$ em confronto com $4 \pi K \rho$ [2]).

Um universo constituído desta maneira não teria um centro relativamente ao campo gravítico. Deixaria de ter cabimento a hipótese de uma densidade a decrescer para o infinito espacial: pelo contrário, manter-se-iam constantes até ao infinito tanto o potencial médio como a densidade média. O conflito que verificámos existir entre a teoria de Newton e a mecânica estatística não existe aqui. A matéria está em equilíbrio para uma certa densidade (extremamente pequena), não sendo necessária a intervenção de forças interiores (pressões) na matéria, para manter tal equilíbrio.

§ 2. *As condições nos limites segundo a teoria da relatividade geral*

Nos parágrafos seguintes vou levar o leitor pelo caminho um tanto indirecto e tortuoso que eu próprio percorri, pois só assim poderei esperar interesse da sua parte para o resultado final. Trouxe-me esse caminho à opinião de que as equações de campo que até agora tenho proposto para a gravitação carecem ainda de uma pequena modificação, destinada a remover, na base da teoria da relatividade geral, as dificuldades de princípio que, no parágrafo anterior, apontámos para a teoria de Newton. Essa modificação corresponde inteiramente à passagem da equação (1) para a equação (2) do mesmo parágrafo. Chegar-se-á dessa maneira à conclusão de que as condições nos limites para o infinito espacial deixam completamente de ter cabimento, porquanto o contínuo universal terá de ser considerado, quanto à sua extensão espacial, como um contínuo fechado em si próprio, tendo um volume espacial (tridimensional) finito.

A opinião que até há pouco tempo mantive acerca das condições nos limites a estabelecer para o infinito espacial assentava nas reflexões que vou apresentar.

Numa teoria de relatividade consequente não pode existir inércia *em relação ao «espaço»*, mas sòmente inércia das massas *em relação umas às outras*. Portanto, se eu colocar uma massa a uma distância espacial suficientemente grande de todas as outras massas do Universo, a sua inércia deverá desvanecer-se. Vamos procurar formular matemàticamente esta condição.

Segundo a teoria da relatividade geral, a quantidade de movimento (negativa) é dada pelas três primeiras componentes e a energia pela última componente do tensor covariante multiplicado por $\sqrt{-g}$ [3])

(4) $$m\sqrt{-g}\,g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}$$

onde, como sempre,

(5) $$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu\,.$$

No caso de especial evidência em que o sistema de coordenadas pode ser escolhido por forma que o campo gravítico tenha isotropia espacial, tem-se, mais simplesmente,

$$ds^2 = -A\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + B\,dx_4^2\,.$$

Se for ainda

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B}\,,$$

obtém-se de (4), em primeira aproximação, para as componentes da quantidade de movimento

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4} \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4} \qquad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4}$$

e para a energia (no caso do repouso)

$$m\sqrt{B}.$$

Das expressões da quantidade de movimento resulta que $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ desempenha o papel da massa inerte. Como m é uma constante que caracteriza o ponto material sem depender da sua posição, esta última expressão só poderá desvanecer-se, mantendo-se no infinito espacial a condição imposta ao determinante [4]), se A tender para zero e B crescer indefinidamente. Uma tal degenerescência dos coeficientes $g_{\mu\nu}$ apresenta-se, deste modo, como uma exigência do postulado de que toda a inércia é relativa. A mesma exigência implica também que a energia potencial $m\sqrt{B}$ se torna infinitamente grande no infinito. Sendo assim, um ponto material não poderá nunca abandonar o sistema; e uma investigação mais detalhada mostra que o mesmo se passa com os raios de luz. Com este comportamento do potencial gravítico no infinito, um sistema de universo não estaria, pois, exposto ao perigo de despovoamento apresentado pela teoria de Newton como anteriormente se referiu.

Faço notar que as hipóteses simplificadoras sobre os potenciais de gravitação que pusemos na base destas considerações foram introduzidas pelo simples motivo de clareza: pode-se encontrar uma formulação geral para o comportamento dos $g_{\mu\nu}$ no infinito capaz de exprimir o essencial da questão, sem necessidade de mais hipóteses limitativas.

Chegado a este ponto, pus-me a investigar, com a amável colaboração do matemático J. Grommer, a existência de campos gravíticos estáticos, dotados de centro de simetria, e satisfazendo à condição de se desvanecerem no infinito, do modo que se indicou. Tomando os potenciais gravíticos $g_{\mu\nu}$, calculou-se com eles, com base nas equações de campo da gravitação, o tensor energia da matéria $T_{\mu\nu}$. Chegou-se, porém, por aí, à conclusão de que, para o sistema das estrelas fixas, não são de admitir tais condições nos limites, como também recentemente o astrónomo De Sitter pôs, e muito bem, em relevo.

Com efeito, o tensor contravariante de energia da matéria ponderável, $T^{\mu\nu}$, é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds},$$

onde ρ representa a medida natural da densidade da matéria. Escolhendo convenientemente o sistema de coordenadas, as velocidades das estrelas apresentar-se-ão muito pequenas em confronto com a velocidade da luz. Sendo assim, ds pode substituir-se por $\sqrt{g_{44}}\, dx_4$. Por aqui se vê que todas as componentes de $T^{\mu\nu}$ devem ser muito pequenas em confronto com a última, T^{44}. Esta condição, porém, não pode conciliar-se com as condições nos limites que foram adoptadas. Aliás, este resultado não tem nada de surpreendente. O facto de as velocidades das estrelas serem pequenas leva a concluir que em parte nenhuma em que haja estrelas fixas o potencial gravítico (no nosso caso $\sqrt{B}$) pode ser muito maior do que nesta região do universo em que nos encontramos: isto depreende-se de considerações estatísticas, exactamente como no caso da teoria de Newton. Em qualquer caso, os nossos cálculos levaram-me à convicção de que não é legítimo postular condições de degenerescência dos $g_{\mu\nu}$ no infinito espacial tais como as que foram indicadas.

Chegada assim a insucesso a nossa tentativa, abrem-se-nos agora duas possibilidades:

a) Postular, como no problema dos planetas, que, mediante uma escolha conveniente do sistema de referência, os $g_{\mu\nu}$ no infinito espacial se aproximam dos valores:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

b) Abster-se completamente de estabelecer para o infinito espacial condições nos limites que pretendam ter validade geral: dar, sim, para cada caso particular, os valores especiais assumidos pelos $g_{\mu\nu}$ na fronteira espacial do domínio considerado, à semelhança do que até agora se costumava fazer para as condições iniciais de tempo.

A possibilidade *b*) não corresponde a uma resolução do problema, mas, pelo contrário, a uma renúncia a tal resolução. É nesta posição, impossível de atacar, que De Sitter se coloca actualmente *. Devo confessar, porém, que para mim é difícil, nesta questão de princípio, aceitar uma tal capitulação. Teria primeiro que me convencer da inutilidade de todo o esforço que se faça para alcançar uma concepção satisfatória.

A possibilidade *a*) não satisfaz por várias razões. Em primeiro lugar, estas condições nos limites pressupõem uma determinada escolha de sistema de referência, e isso repugna ao espírito do princípio da relatividade. Em segundo lugar, com esta concepção renunciamos a entrar em conta com a relatividade da inércia. Com efeito, a inércia de um ponto material de massa m, em valor natural, depende dos $g_{\mu\nu}$; estes, porém, só em pouco diferem dos valores postulados para o infinito espacial. Sendo assim, a inércia seria de facto *influenciada*, mas não *condicionada*, pela matéria (presente no espaço finito). Ainda que só existisse um único ponto material, segundo esta maneira de ver as coisas, ele teria, mesmo assim, inércia, e, na verdade, uma inércia quase tão grande como aquela que possui no nosso universo real, isto é, quando se encontra rodeado de todas as restantes massas presentes nesse universo. Finalmente, há que opor a esta concepção aquelas objecções estatísticas que atrás se apresentaram para a teoria de Newton.

Como se depreende do que ficou dito, não consegui chegar a estabelecer condições nos limites para o infinito espacial. No entanto, existe ainda uma outra possibilidade sem ser aquela que nos faz cair na renúncia indicada, mencionada em *b*). Com efeito, se fosse possível considerar o universo como um contínuo *fechado nas suas dimensões espaciais*,

* De Sitter, Akad. van Wetensch. te Amsterdam, 8 Nov. 1916.

então não haveria nenhuma necessidade de condições nos limites do género das que se têm referido. No que se vai seguir, mostraremos que tanto o postulado da relatividade geral como também o facto de as velocidades das estrelas serem pequenas são conciliáveis com essa hipótese de o universo ser, na sua totalidade, espacialmente fechado. No entanto, para podermos desenvolver esta ideia, teremos primeiro que fazer uma modificação nas equações de campo da gravitação, que as vai tornar mais gerais.

§ 3. *O universo espacialmente fechado com matéria uniformemente distribuída*

O carácter métrico (curvatura) do contínuo quadrimensional espaço-tempo é determinado em cada ponto, segundo a teoria de relatividade geral, pela matéria que aí se encontra e pelo estado dessa matéria. A estrutura métrica deste contínuo não pode então deixar de ser extremamente complexa, dada a irregularidade com que a matéria se distribui. Se essa estrutura, porém, apenas nos interessar «grosso modo», então ser-nos-á permitido imaginar que a distribuição da matéria se faz uniformemente sobre espaços enormes, de tal modo que a densidade de distribuição se apresenta como uma grandeza de variação extremamente lenta. Vamos assim proceder um pouco à maneira dos geodesistas, que tomam um elipsóide como aproximação da forma da Terra, sendo embora esta, no seu pormenor, tão complicada.

O facto mais importante que a observação nos fornece acerca da distribuição da matéria é o de serem muito pequenas as velocidades das estrelas em relação à velocidade da luz. Julgo, por isso, que poderemos começar por pôr na base dos nossos raciocínios a seguinte hipótese aproximativa: existe um sistema de coordenadas em relação ao qual a matéria se pode considerar permanentemente em repouso. Em relação a tal sistema, o tensor contravariante de energia da matéria $T^{\mu\nu}$ terá então, de acordo com (5), a forma simples

$$
(6) \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix} \right.
$$

O escalar ρ da densidade de distribuição (média) pode, «a priori», ser uma função das coordenadas espaciais. Admitindo, porém, que o universo se fecha sobre si próprio, torna-se plausível a hipótese de ρ ser independente do local: admitiremos isso no que se vai seguir.

Pelo que se refere ao campo gravítico, resulta da equação do ponto material

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \nu \end{matrix} \right\} \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} = 0,$$

que um ponto material só pode permanecer em repouso num campo gravítico estático se g_{44} for independente do local [5]). Como, além disso, pressupomos que todas as grandezas são independentes da coordenada tempo x_4, poderemos impôr à solução procurada que seja, para todos os x_ν,

$$(7) \qquad g_{44} = 1.$$

Deverá ainda tomar-se, como para todos os problemas estáticos,

$$(8) \qquad g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0.$$

Falta agora determinar aquelas componentes do potencial gravítico que definem o comportamento puramente geométrico-espacial do nosso contínuo ($g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{33}$). Da nossa premissa sobre a uniformidade de distribuição das massas que geram o campo resulta que a curvatura do espaço métrico procurado deve ser constante. Para tal distribuição de massas deve, pois, o pretendido contínuo dos x_1, x_2, x_3, para x_4 constante, ser um espaço esférico.

Poderemos chegar a um tal espaço empregando, por exemplo, o seguinte processo. Partimos de um espaço euclidiano quadridimensional, ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, com o elemento de linha $d\sigma$, sendo portanto

$$(9) \qquad d\sigma^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2.$$

Neste espaço consideramos a hipersuperfície

$$(10) \qquad R^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2,$$

onde R designa uma constante. Os pontos desta hipersuperfície formam um contínuo tridimensional, um espaço esférico de raio de curvatura R.

O espaço quadridimensional euclidiano de que partimos serve sòmente para fazer de maneira cómoda a definição da nossa hipersuperfície. Os pontos [6]) que nos interessam são sòmente os pontos desta hipersuperfície, a qual apresenta as propriedades métricas que o espaço físico deve possuir quando a distribuição da matéria for uniforme. Para a descrição deste contínuo tridimensional podemos utilizar as coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 (projecção sobre o hiperplano $\xi_4 = 0$), pois que ξ_4 pode ser expresso em função de ξ_1, ξ_2, ξ_3 por meio de (10). Eliminando ξ_4 de (9), obtém-se, para o elemento de linha do espaço esférico, a expressão

$$(11) \qquad \begin{cases} d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, d\xi_\mu\, d\xi_\nu \\ \gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \dfrac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2}, \end{cases}$$

onde $\delta_{\mu\nu} = 1$ se $\mu = \nu$, $\delta_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$; e $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. As coordenadas escolhidas são cómodas quando se trata de estudar a vizinhança de um dos dois pontos $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Agora também o elemento de linha do universo espaço-temporal de quatro dimensões que estamos procurando nos fica dado [7]. Para os potenciais $g_{\mu\nu}$, cujos índices diferem ambos de 4, teremos de pôr, como é evidente

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right). \tag{12}$$

Esta equação, combinada com (7) e (8), determina inteiramente o comportamento de réguas, relógios e raios de luz no universo quadrimensional considerado.

§ 4. *Acerca de um termo suplementar a adicionar às equações de campo da gravitação*

As equações que propus como equações de campo da gravitação são as seguintes, para um sistema de coordenadas de escolha arbitrária [8])

$$\left\{\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \\ G_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Ora este sistema (13) não é satisfeito, de forma nenhuma, pela substituição dos $g_{\mu\nu}$ pelos valores dados em (7), (8) e (12) e do tensor (contravariante) da energia da matéria pelos valores dados em (6): isso depreende-se de um cálculo que se pode efectuar do modo simples indicado no parágrafo seguinte. Sendo assim, se fosse certo que as únicas equações de campo compatíveis com o postulado da relatividade geral eram as equações (13) que até agora tenho utilizado, então não poderíamos deixar de concluir que a teoria de relatividade não é conciliável com a hipótese de um universo espacialmente fechado.

Porém, o sistema (13) [9]) admite uma natural extensão, que o concilia com o postulado da relatividade e que é inteiramente análogo ao que, com a equação (2), se deu à equação de Poisson. Com efeito, podemos adicionar ao primeiro membro da equação de campo (13) o tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ multiplicado por uma constante universal $-\lambda$ provisòriamente desconhecida, sem que isso vá prejudicar a covariância geral; e então, em vez da referida equação (13), teremos a seguinte:

$$(13a) \qquad G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right).$$

Para valores suficientemente pequenos de λ, esta equação está também de acordo, em todos os casos, com os dados da observação no sistema solar. E também respeita as leis de conservação da quantidade de movimento e da energia: com efeito, chega-se a (13a), em vez de se chegar a (13), quando no princípio de Hamilton — que garante a validade das leis de conservação — se introduz um escalar formado com o escalar de Riemann por adição de uma constante universal. A concordância de (13a) com as nossas premissas sobre campo e matéria vai ser demonstrado em seguida.

§ 5. Cálculo e resultado

Como todos os pontos do nosso contínuo são equivalentes, basta efectuar o cálculo para *um só* ponto, por exemplo para um dos dois pontos que têm as coordenadas $x_1 = x_2 =$

$= x_3 = x_4 = 0$. Então, em (13a) deveremos dar aos $g_{\mu\nu}$ os valores

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

onde quer que eles não apareçam diferenciados, ou apareçam como tal uma só vez. Obtém-se então

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu \\ 3\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Atendendo a (7), (8) e (13) verifica-se fàcilmente 10) que todas as equações (13a) são satisfeitas se se verificarem as duas relações

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2}, \quad -\lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2} \qquad \text{ou}$$

(14) $$\lambda = \frac{\varkappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}.$$

A constante universal λ agora introduzida determina, como se vê, tanto a densidade média de distribuição ρ que pode subsistir em equilíbrio, como também o raio R do espaço esférico e o seu volume $2\pi^2 R^3$ 11).

Segundo esta concepção, a massa total do universo, M, é finita, sendo o seu valor

(15) $$M = \rho \cdot 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R\cdot}{\varkappa\cdot} = \frac{\sqrt{32\pi^2}}{\sqrt{\varkappa^3\rho}}.$$

Estas considerações levam-nos a conceber teòricamente o universo real como um espaço curvo, de curvatura variável no espaço e no tempo, de acordo com a densidade de distribuição da matéria, susceptível porém, quando considerado em larga escala, de ser tomado como um espaço esférico. Esta concepção tem, pelo menos, a vantagem de ser lògicamente irrepreensível, e de ser aquela que melhor se cinge ao ponto de vista da teoria da relatividade geral; se ela é ou não compatível com os conhecimentos astronómicos actuais é questão que não discutiremos aqui. É certo que, para conseguir que esta concepção ficasse livre de contradições, tivemos de proceder a uma nova modificação ampliativa das equações de campo da gravitação. Deve, porém, acentuar-se que, mesmo que não se introduza o termo adicional nas equações de campo, se chega ainda à conclusão de um espaço com curvatura positiva: aquele termo apenas nos é necessário para tornar possível uma distribuição quase estática da matéria, tal como deve corresponder ao facto de serem pequenas as velocidades das estrelas.

Notas do Tradutor

1) De $n = n_0\, e^{-\varphi/KT}$ resulta que a $\varphi' - \varphi$ finito corresponde n/n' finito.

2) «Na proximidade de massas mais densas» a densidade local é superior à densidade média. Seja ρ_1 o respectivo excesso. Então o adicional φ_1 deve satisfazer a $\Delta\varphi_1 - \lambda\varphi_1 = 4\pi K\rho_1$ e portanto a $\Delta\varphi_1 = 4\pi K\rho_1$ no caso de ser $\lambda\varphi_1 < 4\pi K\rho_1$. Isto mostra o comportamento de φ_1 como potencial newtoniano.

3) O tensor (contravariante) dx_α/ds é o quadrivector velocidade. Corresponde-lhe o tensor covariante $g_{\mu\alpha}\,\dfrac{dx_\alpha}{ds}$. A multiplicação por $\sqrt{-g}$ (baseada na invariância de $\sqrt{-g}\cdot d\tau$) dá a respectiva «densidade tensorial».

4) Entenda-se: condição $\sqrt{-g} = 1$.

5) Estando o ponto em repouso, tem-se $\dfrac{dx_1}{ds} = \dfrac{dx_2}{ds} = \dfrac{dx_3}{ds} = 0$, donde $ds^2 = g_{44}\, dx_4^2$. Das equações de movimento resulta então $g^{\nu\rho}\begin{bmatrix}44\\ \rho\end{bmatrix} = 0$. Sendo o campo estático, todas as derivadas em ordem a x_4 serão nulas, e então as últimas equações simplificam-se em $g^{\nu\rho}\,\dfrac{\partial g_{44}}{\partial x_\rho} = 0$. Daqui sai, imediatamente, a afirmação do texto.

6) Entenda-se: pontos do espaço quadridimensional.

7) Visto que para esse universo $ds^2 = dx_4^2 - \gamma_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$, ($\mu, \nu = 1, 2, 3$). Cf. «The Meaning of Relativity», Einstein, ed. Methuen, 1955, pág. 99.

8) As equações de campo na ausência de «matéria» são as equações (47) do artigo «Os fundamentos da teoria da relatividade geral» da presente obra. Em vista de (44), do mesmo artigo, essas equações podem escrever-se na forma $B_{\mu\nu} = 0$, $\sqrt{-g} = 1$. Se, porém, se prescindir da condição $\sqrt{-g} = 1$ então será $S_{\mu\nu} \neq 0$ e as equações anteriores serão substituídas por $B_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = 0$. Intervindo matéria, o segundo membro deixará de ser nulo — equações (53) do referido artigo — e chegaremos então às equações (13) do texto supra.

9) No texto alemão (14).

10) Para fazer esta verificação parte-se da métrica $ds^2 = -d_\sigma^2 + dx_4^2$, determinam-se com ela os $g_{\mu\nu}$ [expressões (12)], as respectivas primeiras e segundas derivadas, e as correspondentes expressões dos símbolos de Christoffel e da segunda derivada que aparecem na expressão de $G_{\mu\nu}$. Tendo em conta os valores particulares dos $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas nos pontos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, o primeiro membro de (13a) é representável por uma matriz cujos elementos são todos nulos, excepto $a_{11} = a_{22} = a_{33} = -2/R^2 + \lambda$ e $a_{44} = -\lambda$. O segundo membro de (13a) dá por sua vez uma matriz cujos elementos são todos nulos excepto $b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{44} = -\frac{1}{2}\varkappa\rho$. Equacionando as duas matrizes obtêm-se as condições (14). (Cf. «Albert Einstein, Théorie de la Relativité, trad. Solovine», Paris, Hermann ed., 1933, pág. 104.)

11) Para chegar a esta expressão do volume convém introduzir coordenadas esféricas na expressão de $d\sigma^2$, o que conduz a $dV = a^3 \operatorname{sen}^2 \chi \operatorname{sen} \theta\, d\chi\, d\theta\, d\varphi$ cuja integração entre 0-π, 0-π, 0-2π dá a fórmula do texto. (Cf. Landau, Th. du Champ, ed. La Paix, pág. 439.)

OS CAMPOS DE GRAVIDADE DESEMPENHARÃO UM PAPEL ESSENCIAL NA CONSTITUIÇÃO DAS PARTÍCULAS ELEMENTARES DA MATÉRIA? *

Nem a teoria de Newton nem a teoria relativista da gravitação trouxeram até agora qualquer progresso à teoria da constituição da matéria. Pois vai-se mostrar neste artigo que há razões para pensar que as partículas fundamentais das estruturas eléctricas que formam os átomos se mantêm unidas por forças de gravidade.

§ 1. *Defeitos da concepção actual*

Têm os teóricos feito grandes esforços para a criação de uma teoria explicativa do equilíbrio da electricidade que constitui o electrão. G. Mie, em especial, dedicou a esta questão um estudo profundo. A sua teoria, que encontrou grande aceitação entre os físicos, baseia-se essencialmente na introdução de termos suplementares no tensor-energia. Esses termos, dependentes das componentes do potencial electrodinâmico, vão-se adicionar aos termos de energia da teoria do campo electromagnético de Maxwell-Lorentz. No vazio, tais termos não se fazem notar de modo apreciável, mas no

---

* Reproduzido das «Sitzungsberichten der Preußischen Akad. d. Wissenschaften» 1919.

interior das partículas eléctricas elementares são eles que determinam o equilíbrio contra as forças de repulsão. Por muito bela que seja esta teoria na estrutura formal que lhe deram Mie, Hilbert e Weyl, os seus resultados físicos são, porém, até agora, muito pouco satisfatórios: por um lado é desencorajante o grande número de possibilidades que ela deixa em aberto; por outro lado, ainda se não conseguiu fazer a introdução dos referidos termos adicionais de um modo suficientemente simples para que a solução se pudesse considerar aceitável.

A teoria da relatividade geral, até ao presente momento, em nada modificou este estado da questão. Prescindindo do termo adicional cosmológico, as equações de campo dessa teoria têm a forma

$$(1) \qquad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = - \varkappa T_{ik},$$

onde (R_{ik}) designa o tensor de curvatura de Riemann, depois de se efectuar uma contracção, (R) designa o escalar de curvatura, que é obtido por meio de uma nova contracção, e (T_{ik}) designa o tensor de energia da «matéria». Admite-se aqui, seguindo o desenvolvimento histórico, que os T_{ik} *não* dependem das derivadas dos $g_{\mu\nu}$: pois estas grandezas não são mais que as componentes da energia no sentido da teoria da relatividade especial, na qual não intervêm $g_{\mu\nu}$ variáveis. O segundo termo do primeiro membro da equação é escolhido por forma a conseguir-se que a divergência daquele primeiro membro resulte idênticamente nula [1]), pelo que se obtém a partir de (1), tomando as divergências dos dois membros [2]),

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}_i^\sigma}{\partial x_\sigma} + \frac{1}{2} g_i^{\sigma\tau} \mathfrak{T}_{\sigma\tau} = 0,$$

equação que, no caso limite da teoria da relatividade especial, se transforma nas equações seguintes, que traduzem completamente as leis de conservação :

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad ^{3)}.$$

É aqui que reside o fundamento físico do segundo termo do primeiro membro de (1). Que a esta passagem ao caso limite em que os $g_{\mu\nu}$ são constantes se possa atribuir uma significação é coisa que «a priori» se pode dizer não estar de modo nenhum estabelecida: com efeito, se os campos de gravidade desempenhassem papel essencial na constituição das partículas de matéria, tal passagem ao limite deixaria de ser legítima: porque, então, a constância dos $g_{\mu\nu}$ significaria precisamente a não existência de partículas materiais. Portanto, se quisermos encarar a possibilidade de a gravidade intervir na constituição dos campos que formam os corpúsculos, então não poderemos aceitar com segurança a equação (1).

Se introduzirmos em (1) as componentes de energia do campo electromagnético $\varphi_{\mu\nu}$, segundo Maxwell-Lorentz,

$$(3) \qquad T_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha} \varphi_{k\beta} g^{\alpha\beta},$$

obteremos, tomando as divergências e efectuando alguns cálculos *, a seguinte expressão para (2):

$$(4) \qquad \varphi_{i\alpha} \mathfrak{J}^{\alpha} = 0,$$

* Ver, por exemplo, A. Einstein, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss 1916, págs. 187 e 188.

onde, para abreviar, pusemos

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\,\varphi_{\sigma\tau} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathfrak{J}^\alpha. \tag{5}$$

No cálculo utilizou-se o segundo sistema de equações de Maxwell

$$\frac{\partial \varphi_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial \varphi_{\nu\rho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \varphi_{\rho\mu}}{\partial x_\nu} = 0. \tag{6}$$

De (4) depreende-se que a densidade de corrente ($\mathfrak{J}^\alpha$) se deve desvanecer em todos os pontos do espaço («überall»). Sendo assim, e como há muito tempo é sabido, não poderemos com a equação (1) chegar a uma teoria do electrão, se nos limitarmos a fazer intervir as componentes electromagnéticas da energia da teoria de Maxwell-Lorentz.

A aceitação de (1) lança-nos, pois, no caminho da teoria de Mie *.

Mas não é só o problema da matéria que nos suscita dúvidas sobre a equação (1): é também o problema cosmológico. Como já mostrei num trabalho anterior, a teoria da relatividade geral requer que o universo seja espacialmente fechado, mas esta concepção exige uma extensão da equação (1), mediante a introdução de uma nova constante universal λ, estritamente condicionada pela massa total do universo (e, correspondentemente, pela densidade de equilíbrio da matéria). Ora isto constitui grave defeito para a beleza formal da teoria.

---

* Ver D. Hilbert, Göttinger Nachr., 20 Nov. 1915.

§ 2. *As equações de campo desembaraçadas de escalares* [4])

As dificuldades apontadas conseguem-se evitar se, no lugar das equações de campo (1), se escreverem as equações de campo

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = - \varkappa T_{ik}, \tag{1a}$$

quando (T_{ik}) tiver o significado de tensor de energia do campo electromagnético dado por (3).

A justificação formal do factor $\left(-\frac{1}{4}\right)$ no segundo termo desta equação está em que, por virtude dele, o escalar do primeiro membro

$$g^{ik} (R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R)$$

se torna idênticamente nulo, do mesmo modo que, por virtude de (3), se torna idênticamente nulo o escalar do segundo membro:

$$g^{ik} T_{ik}.$$

Se tivéssemos partido de (1), em vez de termos partido de (1a), teríamos correspondentemente obtido a condição $R = 0$, que deveria ser cumprida em todos os pontos («überall») pelos $g_{\mu\nu}$, independentemente do campo eléctrico. É claro que há-de ser o sistema [(1), (3)] que há-de arrastar como consequência o sistema [(1a), (3)] e não o contrário.

Poder-se-ia agora começar por pôr em dúvida que as equações (1a), combinadas com (6), sejam suficientes para a determinação de todo o campo. Ora numa teoria de relatividade geral só são necessárias $n - 4$ equações diferenciais mùtuamente independentes para fazer a determinação de n variáveis independentes, visto que, em virtude da liberdade de escolha de coordenadas, na solução devem entrar quatro funções inteiramente arbitrárias de todas as coordenadas. Sendo assim, serão necessárias 12 equações independentes uma das outras para fazer a determinação das 16 funções $g_{\mu\nu}$ e $\varphi_{\mu\nu}$. Ora, efectivamente 9 das equações (1a) e 3 das equações (6) são independentes umas das outras.

Quando se forma a divergência de (1a) obtém-se, atendendo a que a divergência de $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ se desvanece,

$$\varphi_{\sigma\alpha} J^{\alpha} + \frac{1}{4\varkappa} \frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}} = 0. \tag{4a}$$

Daqui resulta imediatamente ser constante o escalar de curvatura nos domínios quadridimensionais em que se desvanecer a densidade eléctrica. Se admitirmos haver conexão entre todas estas regiões espaciais, de modo que a densidade eléctrica só se apresente diferente de zero em fios de universo separados uns dos outros, então em todos os pontos fora de tais fios o escalar de curvatura apresentará um valor constante R_0. Mas a equação (4a) também nos leva a uma conclusão importante acerca do comportamento dos domínios em que a densidade eléctrica se não desvanece. Se considerarmos, como é habitual, a electricidade como uma densidade de massas em movimento, pondo

$$J^{\sigma} = \frac{\mathfrak{J}^{\sigma}}{\sqrt{-g}} = \rho \frac{d x_{\sigma}}{ds}, \tag{7}$$

obteremos a partir de (4a), mediante multiplicação interna por J^{σ}, e tendo em conta a anti-simetria de $\varphi_{\mu\nu}$, a relação

$$\frac{\partial R}{\partial x_{\sigma}} \frac{d x_{\sigma}}{ds} = 0. \tag{8}$$

O escalar de curvatura é, pois, constante sobre qualquer linha de universo do movimento da electricidade. A equação (4a) pode ser interpretada de modo intuitivo pelo seguinte enunciado: o escalar de curvatura R desempenha o papel de uma pressão negativa, que apresenta um valor constante R_0 no exterior dos corpúsculos eléctricos; no interior de cada corpúsculo existe uma pressão negativa ($R - R_0$ é que é positivo), sendo o gradiente («Gefälle») dessa pressão que mantém o equilíbrio das forças electrodinâmicas. O valor mínimo da pressão e, portanto, o valor máximo do escalar de curvatura no interior do corpúsculo não varia com o tempo.

Escrevamos agora as equações de campo (1a) na forma

$$(9) \quad \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \frac{1}{4} g_{ik} R_0 = -\varkappa \left(T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0]\right).$$

Por outro lado, transformemos as primitivas equações de campo providas de termo cosmológico [5])

$$R_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right).$$

Subtraindo-lhes a equação escalar multiplicada por $\frac{1}{2}$, obtém-se [6])

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + g_{ik} \lambda = -\varkappa T_{ik}.$$

Ora o segundo membro desta equação desvanece-se nos domínios em que só existam campo eléctrico e campo gravítico. Nesses domínios obtém-se, formando o escalar, $-R + 4\lambda = 0$.

Em tais domínios o escalar de curvatura é pois constante pelo que λ se pode substituir por $\frac{R_0}{4}$. Podemos, por isso, escrever as anteriores equações (1) na forma

$$(10) \qquad \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) + \frac{1}{4} g_{ik} R_0 = -\varkappa T_{ik}.$$

Comparando (9) com (10), verifica-se que as novas equações de campo só diferem das anteriores pelo facto de nelas entrar como tensor das «massas gravitatórias» a função do escalar de curvatura

$$T_{ik} + \frac{1}{4\varkappa} g_{ik} [R - R_0]$$

em substituição de T_{ik}. Mas esta nova formulação tem, em relação à anterior, a grande vantagem de que a grandeza λ passa a intervir nas equações fundamentais da teoria como constante de integração e não já como uma constante universal inerente à lei fundamental.

§ 3. *Acerca da questão cosmológica*

O último resultado deixa prever já que na nossa nova formulação o universo pode ser considerado espacialmente fechado, sem que para isso tenha que se introduzir uma hipótese adicional. Vamos mostrar, como fizemos no trabalho anterior, que, para uma distribuição uniforme da matéria, um universo esférico é compatível com as equações.

Comecemos por pôr

$$(11) \qquad ds^2 = - \sum \gamma_{ik} dx_i dx_k + dx_4^2 \; (i, k = 1, 2, 3)$$

Se forem então P_{ik} e P respectivamente o tensor de curvatura de segunda ordem e o escalar de curvatura no espaço tridimensional, teremos:

$$\begin{aligned} R_{ik} &= P_{ik} \; (i, k = 1, 2, 3) \\ R_{i4} &= R_{4i} = R_{44} = 0 \\ R &= -P \\ -g &= \gamma. \end{aligned}$$

Para o nosso caso, resulta então

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P \, (i, k = 1, 2, 3)$$

$$R_{44} - \frac{1}{2} g_{44} R = \frac{1}{2} P.$$

Daqui em diante poderemos seguir dois raciocínios. Primeiro, vamos tomar como ponto de partida a equação (1a). Nesta equação, T_{ik} representa o tensor de energia do campo electromagnético que é produzido pelas partículas eléctricas constituintes da matéria. Para tal campo tem validade universal a relação

$$\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^2 + \mathfrak{T}_3^3 + \mathfrak{T}_4^4 = 0.$$

Os $\mathfrak{T}_i^k$ individuais são funções de posição de variação rápida; mas na questão de que nos estamos ocupando poderemos, sem dúvida, tomar em vez deles os seus valores médios. Tomaremos então

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}_1^1 = \mathfrak{T}_2^2 = \mathfrak{T}_3^3 = -\frac{1}{3} \mathfrak{T}_4^4 = \text{constante.} \\ \qquad \mathfrak{T}_i^k = 0 \ (\text{para } i \neq k), \end{array} \right.$$

e portanto

$$T_{ik} = + \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik} \, ; \qquad T_{44} = \frac{\mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

Tomando em conta o que até agora se deduziu, obteremos, em substituição de (1a),

$$(13) \qquad P_{ik} - \frac{1}{4} \gamma_{ik} P = - \frac{1}{3} \gamma_{ik} \frac{\varkappa \mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

$$(14) \qquad \frac{1}{4} P = - \frac{\varkappa \mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}}.$$

A equação escalar correspondente a (13) coincide com (14). É daqui que resulta admitirem as nossas equações fundamentais um universo esférico. Com efeito, de (13) e (14) vem

$$P_{ik} + \frac{4}{3} \frac{\varkappa \mathfrak{T}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \gamma_{ik} = 0, \tag{15}$$

sistema que se sabe * ser satisfeito por um universo esférico (tridimensional).

Mas podemos também basear o nosso raciocínio nas equações (9). No segundo membro de (9) encontram-se aqueles termos que um critério fenomenológico indica deverem substituir-se pelo tensor energia da matéria. Substituamo-los então por

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho, \end{matrix}$$

onde ρ representa a densidade média da matéria, considerada em repouso. Obtêm-se assim as equações

$$P_{ik} - \frac{1}{2} \gamma_{ik} P - \frac{1}{4} \gamma_{ik} R_0 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{4} R_0 = -\varkappa \rho. \tag{17}$$

Com a equação escalar correspondente a (16) e com a equação (17) obtém-se

$$R_0 = -\frac{2}{3} P = 2 \varkappa \rho \tag{18}$$

e portanto, de (16),

$$P_{ik} - \varkappa \rho \gamma_{ik} = 0, \tag{19}$$

* Cf. H. Weyl, «Raum, Zeit, Materie», § 33.

equação que coincide com (15), excepto na expressão dos coeficientes. Por comparação, vem

$$\mathfrak{T}_4^4 = \frac{3}{4}\rho\sqrt{\gamma}. \tag{20}$$

Esta equação mostra que, da energia que constitui a matéria, três quartos pertencem ao campo electromagnético e um quarto ao campo gravítico.

§ 4. *Observações finais*

As considerações precedentes mostram a possibilidade de se construir uma teoria da matéria sòmente com os campos gravítico e electromagnético, sem terem de se introduzir hipotéticos termos adicionais, à maneira da teoria de Mie. Esta possibilidade apresenta-se particularmente promissora, na medida em que nos liberta da necessidade de introduzir uma constante especial λ para a resolução do problema cosmológico. Mas, por outro lado, traz consigo uma dificuldade, que é a seguinte: a aplicação de (1) ao caso estático de simetria esférica deixa-nos com uma equação a menos para a determinação dos $g_{\mu\nu}$ e $\varphi_{\mu\nu}$, pelo que *toda e qualquer distribuição* de electricidade *dotada de simetria esférica* se mostra capaz de permanecer em equilíbrio. Assim, o problema da constituição dos quanta elementares não pode ainda ser resolvido tomando sòmente por base as equações de campo que apresentámos.

Notas do Tradutor

[1]) Ver a obra já citada de Einstein «The meaning of Relativity», ed. Methuen, 5.ª ed., pág. 80 e segs.: aí se justifica a forma proposta para a equação de campo (1) e se demonstra o desvanecimento da divergência do seu primeiro membro.

[2]) Chega-se ao primeiro membro desta equação aplicando ao tensor T a fórmula (41b) do artigo «Os fundamentos da teoria da relatividade geral» da presente obra. Essa fórmula dá o produto por $\sqrt{-g}$ da divergência de um tensor simétrico de segunda ordem. Introduzem-se depois nela as densidades tensoriais $\sqrt{-g}\,T_i^\sigma = \mathfrak{T}_i^\sigma$ e $\sqrt{-g}\,T_{\sigma\tau} = \mathfrak{T}_{\sigma\tau}$ e ainda a notação $g_i^{\sigma\tau} = \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x_i}$.

[3]) Sendo os $g^{\sigma\tau}$ constantes e $\sqrt{-g} = 1$, resulta imediatamente esta equação.

[4]) O título no texto alemão é: «Die skalarfreien Feldgleichungen». Seria mais clara que a do texto a seguinte tradução: «Forma das equações de campo em que se tornam idênticamente nulos os escalares dos dois membros».

[5]) Isto é, as equações (1) com o termo $-\lambda g_{ik}$ no primeiro membro.

[6]) A equação escalar obtida da última equação escrita (multiplicando-a por $g^{\varrho i}$ e em seguida fazendo a contracção $\varrho = k$) é $R - 4\lambda = = \varkappa T$. Multiplicando esta equação por $\frac{1}{2} g_{ik}$ e efectuando a subtracção referida chega-se ao resultado do texto.

H. WEYL

GRAVITAÇÃO E ELECTRICIDADE

GRAVITAÇÃO E ELECTRICIDADE *

Segundo Riemann ** a geometria assenta nos dois factos seguintes:

1. *O espaço é um contínuo tridimensional* e, portanto, a multiplicidade formada pelos seus pontos pode ser descrita, de modo contínuo, pelo sistema de valores de três coordenadas x_1, x_2, x_3.

2. *(Teorema de Pitágoras.)* O quadrado da distância ds^2 de dois pontos infinitamente próximos

$$(1) \quad P = (x_1, x_2, x_3) \text{ e } P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$$

é (utilizando coordenadas arbitrárias) uma forma quadrática das coordenadas relativas dx_i:

$$(2) \qquad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (g_{ki} = g_{ik}).$$

Poderemos exprimir este segundo facto de um modo abreviado dizendo: o espaço é um contínuo *métrico*. Em inteira conformidade com o espírito da moderna física de acção

* Reproduzido das «Sitzungsberichten der Preußischen Akad. d. Wissenschaften» 1918. — Algumas notas de fundo de página adicionadas pelo autor quando se fez esta reprodução vão assinaladas com parênteses rectos.

** «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen»; Math. Werke (2.ª edição, Leipzig, 1892) Nr. XII, pág. 282.

próxima, estipularemos que o teorema de Pitágoras só é válido rigorosamente dentro de domínios infinitamente pequenos.

A teoria da relatividade especial levou a considerar o *tempo* como uma quarta coordenada (x_0), que se vem reunir às três coordenadas espaciais em pé de igualdade com elas, de modo que o palco em que se desenrolam os acontecimentos materiais — *o universo* («die Welt») — *é um contínuo métrico quadridimensional.* A forma quadrática (2) que define a métrica do Universo não é definida-positiva, como no caso da geometria do espaço tridimensional, mas sim de índice de inércia 3 [1]). Já Riemann manifestou a ideia de que a métrica deve ser considerada como algo de real que, por exemplo nas forças centrífugas, se manifesta como um agente que está exercendo efeitos reais sobre a matéria; e de que, consequentemente, se deve admitir que a matéria reage, por sua vez, sobre a métrica ao passo que até então todos os geómetras e filosófos concebiam a métrica como algo que pertence ao espaço em si mesmo, sem relação com o seu conteúdo material. Foi sobre esta ideia, cujo desenvolvimento não era ainda possível para Riemann, que Einstein ergueu em nossos dias (sem a influência daquele) o grandioso edifício da sua teoria da relatividade geral. Segundo Einstein, também as manifestações da *gravidade* são de atribuir à métrica universal, sendo as leis que regem a actúação da matéria sobre a métrica precisamente as leis da gravitação: os g_{ik} que figuram em (2) constituem as componentes do potencial de gravitação. Este potencial consiste assim numa forma diferencial *quadrática* invariante: ao passo que os *fenómenos electromagnéticos* são regidos por um quadripotencial cujas componentes se reunem numa forma diferencial *linear* invariante $\sum \varphi_i dx_i$. Até agora, porém, estes dois domínios fenomenológicos — gravitação e electricidade — têm permanecido isolados ao lado um do outro.

De trabalhos recentes de Levi-Civita *, de Hessenberg ** e do autor *** resulta com toda a clareza que uma construção da geometria de Riemann feita de acordo com as leis da natureza («naturgemäß») tem de tomar como alicerce o conceito fundamental de deslocamento paralelo infinitesimal de um vector. Se P e $P_{\bullet}$ forem dois pontos quaisquer ligados por uma curva, um vector dado em P pode ser deslocado paralelamente a si mesmo de P para $P_{\bullet}$ ao longo desta curva. Mas em geral um tal transporte de P para $P_{\bullet}$ não é integrável, isto é, o vector que chega a $P_{\bullet}$ depende do caminho ao longo do qual se efectuou o deslocamento. Só na geometria euclidiana («agravítica») é que essa integrabilidade se verifica.

Ora na geometria de Riemann que acima caracterizámos subsiste como resíduo um último elemento da geometria a distância, não havendo, a meu ver, motivo de peso que o justifique: a sua origem parece dever-se encontrar no facto, acidental, de essa geometria ter sido construída a partir da teoria das superfícies. Com efeito, a forma quadrática (2) não só nos permite comparar, quanto ao seu comprimento, dois vectores no mesmo ponto, como ainda dois vectores em quaisquer dois pontos, afastados um do outro. Porém, *o único princípio de transporte de comprimentos que uma verdadeira geometria de proximidade* («Nahe-Geometrie») *pode reconhecer é o transporte de um ponto para outro infinitamente próximo do primeiro*; sendo a integrabilidade do problema do transporte de comprimentos de um ponto para outro a distância finita do primeiro tanto menos de admitir «a priori», quanto é certo que o problema

---

* Nozione di parallelismo..., Rend. del Circ. Matem. di Palermo 42 (1917).

** Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie, Math. Ann. 78 (1917).

*** Raum, Zeit, Materie (1. Aufl. Berlin 1918), § 14.

do transporte de direcção se revelou não integrável. Quando se remove esta inconsequência, surge uma geometria que, sendo aplicada ao universo, surpreendentemente *explica não só os fenómenos da gravitação, mas também os do campo electromagnético*. Na teoria assim construída, ambas estas categorias de fenómenos brotam da mesma fonte, *não sendo, em geral, de modo nenhum possível fazer entre gravitação e electricidade qualquer separação que não seja arbitrária.*

Com esta teoria *todas as grandezas físicas adquirem um significado dentro da geometria do universo*; *e em especial a grandeza «acção» surge na teoria, «a priori», como um número puro. A teoria conduz a uma determinada lei do universo, unívoca, na sua essência e permite até chegar, de certo modo, a compreender por que é que o universo é quadridimensional.* — Vou agora esboçar aqui uma construção da geometria de Riemann, corrigida, sem utilizar nela quaisquer pressupostos físicos: a aplicação à física é que há-de resultar depois por si mesma.

Num determinado sistema de coordenadas, as coordenadas relativas, dx_i, de um ponto P' infinitamente próximo de um ponto P — ver (1) — são as componentes do *deslocamento infinitesimal* $\overrightarrow{PP'}$. A passagem de um sistema de coordenadas para outro exprime-se por fórmulas de transformação contínuas

$$x_i = x_i\left(x_1^{\bullet}, x_2^{\bullet}, \dots, x_n^{\bullet}\right) \qquad \left(i = 1, 2, \dots, n\right)$$

que definem a dependência entre as coordenadas de um mesmo ponto num e noutro sistema. Entre as componentes dx_i e $dx_i^{\bullet}$ do mesmo deslocamento infinitesimal do ponto P temos as seguintes fórmulas lineares de transformação

$$(3) \qquad dx_i = \sum_k \alpha_{ik}\, dx_k^{\bullet},$$

nas quais os α_{ik} são os valores das derivadas $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_k^{\bullet}}$ no ponto P.

Um vector (contravariante) no ponto P tem como componentes em relação a cada sistema de coordenadas n determinados números ξ^i, os quais, na passagem para um outro sistema de coordenadas, se transformam exactamente da mesma maneira, (3), que as componentes de um deslocamento infinetesimal. Ao conjunto dos vectores no ponto P chamarei *espaço vectorial* em P. Um tal espaço é: primeiro *linear* ou *afim*, isto é, quando se multiplica por um número um vector em P, ou quando se adicionam dois desses vectores, obtém-se sempre, novamente, um vector em P; e segundo *métrico*: com cada par de vectores $\mathfrak{x}$ e $\mathfrak{y}$, de componentes ξ^i, η^i está associado, de modo invariante, por meio da forma bilinear simétrica contida em (2), um produto escalar

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{x} = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k .$$

Na nossa teoria, porém, *esta forma sòmente se considera determinada a menos de um factor de proporcionalidade positivo arbitrário*. Se a multiplicidade constituída pelos pontos do espaço for descrita por meio das coordenadas x_i, os g_{ik} no ponto P não ficarão determinados pela métrica: sòmente as razões entre eles é que ficam determinadas. E, do ponto de vista físico, também só essas razões é que têm um significado directamente apreensível. À equação

$$\sum_{ik} g_{ik} \, dx_i \, dx_k = 0$$

satisfazem, nomeadamente, para um dado ponto origem, aqueles pontos de universo infinitamente próximos, P', onde chegue um sinal luminoso emitido de P. Para fazer a descrição analítica teremos de: primeiro, escolher um determinado sistema de coordenadas e segundo, fixar em cada ponto P o factor de proporcionalmente arbitrário que afecta os g_{ik}. As fórmulas a que se chegar deverão, consequentemente, gozar de uma dupla invariância: primeiro, deverão ser *invariantes em relação a quaisquer transformações contínuas de coordenadas*; segundo, deverão permanecer inalteradas *quando os* g_{ik} *se substituírem por* λg_{ik}, sendo o λ uma função contínua, arbitrária, do local. É a entrada em cena desta segunda propriedade de invariância que caracteriza a nossa teoria.

Sejam P e $P_\bullet$ dois pontos quaisquer, e suponhamos que a cada vector $\mathfrak{x}$ em P corresponde um vector $\mathfrak{x}_\bullet$ em $P_\bullet$, sendo o processo de correspondência tal que, em geral, a $\alpha\mathfrak{x}$ corresponda $\alpha\mathfrak{x}_\bullet$ (sendo α um número arbitrário) e a $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ corresponda $\mathfrak{x}_\bullet + \mathfrak{y}_\bullet$, e tal ainda que o vector zero em P seja o único ao qual corresponde em $P_\bullet$ o vector zero. Obtém-se desta maneira uma *aplicação* 2) *afim ou linear* do espaço vectorial em P sobre o espaço vectorial em $P_\bullet$. Esta aplicação é uma *transformação de semelhança* 3) se se verificar o caso particular de o produto escalar dos vectores-imagem $\mathfrak{x}_\bullet \cdot \mathfrak{y}_\bullet$ em $P_\bullet$ ser proporcional ao produto escalar dos vectores $\mathfrak{x}$ e $\mathfrak{y}$ em P para todos os pares de vectores $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. (Na nossa teoria só este conceito de aplicação de semelhança é que tem um significado objectivo: na teoria até agora seguida era possível definir o conceito, mais restritivo, de aplicação *congruente* 4). As duas premissas axiomáticas seguintes vão fixar o que deve ser entendido por *deslocamento paralelo de um vector* no ponto P para um ponto vizinho P':

1. Quando se faz o deslocamento paralelo dos vectores no ponto P para o ponto vizinho P', obtém-se uma aplicação de semelhança do espaço vectorial em P sobre o espaço vectorial em P';

2. Se P_1 e P_2 forem dois pontos da vizinhança de P; se o vector infinitesimal $\overrightarrow{PP_2}$ for transferido por deslocamento paralelo para o ponto P_1, convertendo-se em $\overrightarrow{P_1P_{12}}$;

e se o vector infinitesimal $\overrightarrow{PP_1}$ for transferido por deslocamento paralelo para o ponto P_2, convertendo-se em $\overrightarrow{P_2P_{21}}$; então os pontos P_{12} e P_{21} ficarão em coincidência (propriedade comutativa).

Aquela parte da premissa 1. que afirma que o deslocamento paralelo é uma transposição afim do espaço vectorial de P para P' [5]) exprime-se analìticamente da seguinte maneira: o vector ξ^i, em $P = (x_1\ x_2 \dots x_n)$ transforma-se, por deslocamento, num vector $\xi^i + d\xi^i$, em $P' = (x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ \dots,\ x_n + dx_n)$, cujas componentes dependem linearmente de ξ^i:

(4) $$d\xi^i = -\sum_r d\gamma^i_r \xi^r.$$

A premissa 2. ensina que os $d\gamma^i_r$ são formas diferenciais lineares

$$d\gamma^i_r = \sum_s \Gamma^i_{rs} dx_s,$$

cujos coeficientes possuem a propriedade de simetria

(5) $$\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs}.$$

Se dois vectores ξ^i, η^i em P se transformarem, por deslocamento paralelo para P', em $\xi^i + d\xi^i$, $\eta^i + d\eta^i$, então a premissa, contida em 1., de que a aplicação obtida, mais que afim, é também de semelhança, permite afirmar que

$$\sum_{ik} (g_{ik} + dg_{ik})\,(\xi^i + d\xi^i)\,(\eta^k + d\eta^k)$$

deve ser proporcional a $\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\eta^k$. Designemos o factor de proporcionalidade, que difere de 1 infinitamente pouco, por

$1 + d\varphi$; e definamos, como é habitual, o abaixamento de um índice pela fórmula

$$a_i = \sum_k g_{ik} a^k.$$

Resultará então

$$dg_{ik} - (d\gamma_{ki} + d\gamma_{ik}) = g_{ik}\, d\varphi. \tag{6}$$

Daqui resulta que $d\varphi$ é uma forma diferencial linear:

$$d\varphi = \sum_i \varphi_i\, dx_i. \tag{7}$$

Sendo ela conhecida, a equação (6) ou

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} - g_{ik}\,\varphi_r$$

combinada com a condição de simetria (5) determina univocamente as grandezas Γ. Deste modo, *a conexão métrica interna* («innere Maßzusammenhang») *do espaço depende não só da forma quadrática* (2) (determinada a menos de um factor de proporcionalidade arbitrário) *mas ainda de uma forma linear* (7) *.

---

* [Posteriormente introduzi na construção da teoria as seguintes modificações — Cf. apresentação definitiva na 5.ª edição de «Raum, Zeit, Materie», 1923, §§ 15-17 — : *a*) Em vez dos postulados 1. e 2. a que tem de satisfazer o deslocamento paralelo, um só postulado intervém: deve existir para o ponto P um sistema de coordenadas tal que, quando seja utilizado, as componentes de qualquer vector em P não sofram alteração durante um deslocamento paralelo para qualquer ponto da vizinhança infinitesimal de P. Este postulado caracteriza o que há de essencial no deslocamento paralelo, considerando-o como uma transposição para a qual é legítimo supor que os vectores fiquem «inalterados». *b*) À *métrica* no ponto isolado P, segundo a qual cada vector $\mathfrak{x} = (\xi^i)$ em P tem associado consigo um *comprimento* («Strecke») por uma forma tal que dois vectores definem o mesmo comprimento se, e só se, têm

Se substituirmos g_{ik} por λg_{ik}, sem mudarmos o sistema de coordenadas, as grandezas $d\gamma^i_k$ não se modificarão, os $d\gamma_{ik}$ passam a incluir o factor λ e os dg_{ik} transformam-se em $\lambda dg_{ik} + g_{ik} d\lambda$. A equação (6) mostra então que $d\varphi$ se converte em

$$d\varphi + \frac{d\lambda}{\lambda} = d\varphi + d \lg \lambda.$$

Há, pois, uma arbitrariedade inerente à forma linear $\sum \varphi_i dx_i$; mas o que fica indeterminado não é um factor de proporcionalidade a fixar mediante uma escolha arbitrária de unidades 6), mas sim uma *diferencial total aditiva*. Para representação analítica da geometria, as formas

$$(8) \qquad g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad \varphi_i\, dx_i$$

são equivalentes às formas

$$(9) \qquad \lambda \cdot g_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad \varphi_i\, dx_i + d \lg \lambda,$$

---

a mesma medida («Maßzahl») $l = \sum g_{ik} \xi^i \xi^k$, vem juntar-se a *conexão métrica* de P com os pontos da sua vizinhança: a transposição congruente para o ponto infinitamente próximo P' transforma um comprimento em P num determinado comprimento em P'. Se submetermos este conceito de transposição congruente de comprimentos a uma condição análoga à que foi imposta em *a*) ao conceito de deslocamento paralelo de vectores, reconheceremos que este processo (pelo qual a medida l do comprimento sofre o aumento dl) se exprime numa equação

$$dl = l d\varphi; \qquad d\varphi = \sum \varphi_i\, dx_i.$$

Nestas circunstâncias, a métrica e a conexão métrica determinam univocamente a conexão «afim» (deslocamento paralelo) — e, segundo a minha concepção actual do problema do espaço, é exactamente este aspecto que constitui o facto fundamental da geometria — enquanto que, segundo a exposição do texto, é a forma linear $d\varphi$ que, para uma dada métrica, fica arbitrária no deslocamento paralelo.]

nas quais λ representa uma função do local positiva e arbitrária. Em vista disto, *tem significado invariante o tensor anti-simétrico de componentes*

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \tag{10}$$ [7)]

ou seja, a forma $F_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = \frac{1}{2} F_{ik}\, \Delta x_{ik}$, [8)]

que depende bilinearmente dos dois deslocamentos arbitrários dx e ∂x no ponto P — ou melhor, que depende linearmente do elemento de superfície construído sobre esses dois deslocamentos, tendo como componentes

$$\Delta x_{ik} = dx_i\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_i$$ [9)]

Se for possível fixar os g_{ik}, em valor absoluto, por forma tal que os φ_i se tornem nulos, então surge como caso particular o caso da teoria que até agora se tem aceite, em que a unidade de comprimento se deixa transportar, por deslocamento paralelo, para todos os pontos do espaço, sem ficar dependente do caminho seguido [10)]. Os Γ^i_{rs} nada mais serão então que os símbolos de três índices de Christoffel [11)]. A condição invariante necessária e suficiente para que o referido caso particular se dê [12)] é que o tensor F_{ik} se torne idênticamente nulo [13)]. Isto inclina-nos muito para a interpretação de φ_i na geometria do universo como sendo o *quadripotencial electromagnético* e, portanto, o tensor F como sendo o *campo electromagnético*: e isto porque a não existência de um campo electromagnético é a condição necessária para a validade da actual teoria de Einstein, da qual sòmente os fenómenos gravíticos resultam como consequência. Aceitando tal interpretação, reconhece-se que as grandezas eléctricas são de uma tal natureza que a sua caracterização por meio de números, num dado sistema de coordenadas, não fica dependente da arbitrariedade da escolha de uma unidade de medida. A questão da unidade de medida e da dimensão, considerada em geral, tem de ser encarada, na presente teoria, sob um novo ângulo. Até agora dizia-se, por exemplo, que uma grandeza era um tensor do segundo grau (de segunda ordem) desde que, *tendo sido feita, arbitràriamente, a escolha de uma unidade de medida*, um valor particular dessa grandeza determinasse, em cada sistema de coordenadas, uma matriz de números a_{ik}, sendo estes os coeficientes de uma forma bilinear invariante de dois deslocamentos infinitesimais arbitrários

$$(11) \qquad a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k$$

Aqui entenderemos, ao falar de um tensor, que os a_{ik}, quando se toma como base um determinado sistema de coordenadas, e *se faz uma determinada escolha do factor de proporcionalidade contido nos* g_{ik}, são univocamente determinados, e por tal modo que a forma (11) permanece invariante quando se faz uma transformação de coordenadas; quando, porém, os g_{ik} se substituirem por λg_{ik}, então os a_{ik} converter-se-ão em $\lambda^e a_{ik}$. Diremos então que o tensor tem o *peso e*, ou ainda que é de dimensão l^{2e}, se ao elemento de linha ds atribuirmos a dimensão «*comprimento* = l». Só os tensores de peso 0 é que serão absolutamente invariantes. É desta espécie o tensor de componentes F_{ik}. Ele satisfaz, como mostra (10), ao primeiro sistema de equações de Maxwell

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Uma vez estabelecido o conceito de deslocamento paralelo, torna-se fácil estabelecer as bases da geometria e do cálculo tensorial. *a*) *Linhas geodésicas.* Dado um ponto P e nele um vector, a linha geodésica que sai desse ponto na direcção desse vector é a linha que se obtém quando se imprime ao referido vector um deslocamento paralelo contínuo na sua própria direcção. A equação diferencial da linha geodésica, quando se utiliza um parâmetro adequado τ, é a seguinte: [14])

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{rs} \frac{dx_r}{d\tau} \frac{dx_s}{d\tau} = 0.$$

(É claro que ela não pode ser caracterizada aqui como linha de comprimento mínimo, visto que o conceito de comprimento de uma curva não tem significado.) *b*) *Cálculo tensorial.* Se quisermos, por exemplo, deduzir por diferenciação um campo de tensores de grau 2 a partir de um campo de tensores covariante de grau 1, com o peso 0, tendo por componentes f_i, tomemos como auxiliar um vector arbitrário ξ_i no ponto P, formemos o invariante $f_i\xi^i$, e determinemos a variação infinitamente pequena sofrida por este invariante quando se efectua uma transferência do ponto P, de coordenadas x_i, para o ponto vizinho P', de coordenadas $x_i + dx_i$, deslocando-se o vector ξ, nessa transferência, paralelamente a si próprio. Obtém-se para tal variação

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \xi^i dx_k + f_r d\xi^r = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \Gamma^r_{ik} f_r\right) \xi^i dx_k.$$

As grandezas entre parênteses do segundo membro são, então, as componentes de um campo de tensores de grau 2, com o peso 0, formado a partir do campo f de um modo inteiramente invariante. *c*) *Curvatura.* Para construir o análogo do tensor de curvatura de Riemann, retomemos o paralelogramo infinitamente pequeno formado pelos pontos P, P_1, P_2, e $P_{12} = P_{21}$, que atrás utilizámos *. Deslo-

* Aqui é irrelevante que os lados opostos do «paralelogramo» infinitamente pequeno se obtenham um do outro por deslocamento paralelo; o que importa é sòmente que os pontos P_{12} e P_{21} sejam coincidentes.

quemos um vector $\mathfrak{x} = (\xi^i)$ em P paralelamente a si mesmo para P_1 e daqui para P_{12}; partindo novamente de P, desloquemos agora o mesmo vector primeiro para P_2 e daqui para P_{21}. Obteremos, assim, dois vectores nos pontos P_{12} e P_{21}. Ora, como estes pontos são coincidentes, tem agora sentido efectuar a diferença $\Delta\, \mathfrak{x}$ entre os dois vectores obtidos. Encontra-se para as componentes de tal diferença a expressão

$$(12) \qquad \Delta \xi^i = \Delta\, R^i_j \cdot \xi^j,$$

onde os $\Delta\, R^i_j$ são independentes do vector $\mathfrak{x}$ deslocado, mas são, em compensação, linearmente dependentes do elemento de superfície que se pode construir sobre os dois deslocamentos $\overrightarrow{PP}_1 = (dx_i)$, $\overrightarrow{PP}_2 = (\delta x_i)$:

$$\Delta\, R^i_j = R^i_{jkl}\, dx_k\, \delta x_l = \tfrac{1}{2}\, R^i_{jkl}\, \Delta x_{kl}\,.$$

As componentes de curvatura R^i_{jkl}, ùnicamente dependentes da posição P, têm as duas seguintes propriedades de simetria: primeira, mudam de sinal quando se permutam os dois últimos índices k e l; segunda, efectuando sobre j, k, l as três permutações cíclicas e adicionando as três respectivas componentes obtém-se 0. Baixando o índice i obtêm-se as componentes R_{ijkl} de um tensor covariante de grau 4 e peso 1. Ainda sem cálculo, por um simples raciocínio, chega-se à conclusão de que R é decomponível, de modo invariante e natural, em duas parcelas

$$(13) \qquad R^i_{jkl} = P^i_{jkl} - \tfrac{1}{2}\, \delta^i_j\, F_{kl} \qquad \delta^i_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases},$$

sendo P_{ijkl} [15]) anti-simétrica não só nos índices k, l como também nos índices i e j. Enquanto que as equações $F_{ik} = 0$ caracterizam o nosso espaço como um espaço desprovido de campo electromagnético, isto é, como um espaço em que o transporte de comprimentos é integrável, as equações $P^l_{jkl} = 0$ são, como se deduz de (13), as condições para que não haja campo de gravidade, isto é, para que seja integrável o problema do transporte de direcção. Só o espaço euclidiano é que é, ao mesmo tempo, desprovido de electricidade e de gravitação.

O mais simples invariante de uma transformação linear como (12), que faz corresponder a cada vector $\mathfrak{x}$ um vector $\Delta \mathfrak{x}$, é o seu «traço»

$$\frac{1}{n} \Delta R^l_l. \qquad 16)$$

Segundo (13), teremos aqui para ele a expressão

$$-\frac{1}{2} F_{ik}\, dx_i\, \delta x_k,$$

que já encontrámos atrás. O mais simples invariante de um tensor como $-\frac{1}{2} F_{ik}$ é o quadrado do seu módulo:

$$L = \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik}.$$

Como o tensor F tem o peso 0, torna-se evidente que L é um invariante de peso -2 17). Se g for o determinante negativo dos g_{ik}, e

$$d\omega = \sqrt{g}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \sqrt{g}\, dx$$

for o volume de um elemento de volume infinitamente pequeno, o integral de acção eléctrica («elektrische Wirkungsgrösse»), que rege, como é sabido 18), a teoria de Maxwell, será igual ao integral $\int L d\omega$ do referido invariante mais simples, estendido a uma região arbitrária do universo; de modo que a intervenção desse integral na teoria faz-se do modo seguinte: para quaisquer variações dos

g_{ik} e φ_i que se reduzam a zero sobre a fronteira da região do universo que se considera, teremos:

$$\delta \int L d\omega = \int (S^i \delta \varphi_i + T^{ik} \delta g_{ik}) d\omega$$

onde os
$$S^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} F^{ik})}{dx_k}$$

são os primeiros membros das equações não homogéneas de Maxwell (em cujos segundos membros figuram as componentes da quadricorrente); e onde os T^{ik} são as quantidades que formam o tensor impulsão-energia do campo electromagnético. Como L é um invariante de peso -2 e o elemento de volume na geometria n-dimensional é um invariante de peso $\frac{n}{2}$ 19), o integral $\int L d\omega$ só terá sentido quando o número de dimensão for $n = 4$. Assim, *na nossa interpretação, a possibilidade da teoria de Maxwell está ligada ao número de dimensões* 4. Mas no universo quadridimensional a grandeza acção electromagnética torna-se um número puro. Quanto ao tamanho com que a grandeza acção unidade se apresenta nas tradicionais unidades de medida do sistema C. G. S., isso é questão que, como é óbvio, só poderá ficar resolvido depois de se ter tratado pelo cálculo, sobre as bases da nossa teoria, um problema físico susceptível de ser submetido à prova da observação, por exemplo o electrão.

Passando da geometria à física, teremos de admitir, seguindo o modelo da teoria de Mie *, que o conjunto das leis da Natureza assenta num determinado invariante integral, o integral de acção («Wirkungsgrösse»),

$$\int W d\omega = \int \mathfrak{W} dx \qquad (\mathfrak{W} = W\sqrt{g})$$

* Ann. d. Physik, 37, 39, 40 (1912-13).

por forma tal que *o universo real se distingue, entre todos os espaços quadridimensionais possíveis, pelo facto de, para ele, a acção contida em qualquer domínio de universo assumir um valor extremal* para aquelas variações dos potenciais g_{ik}, φ_i que se desvaneçam nos limites do domínio considerado. $\mathfrak{W}$, densidade de universo da acção, deve ser um invariante de peso — 2. *A acção*, essa *é sempre um número puro*: e, assim, a nossa teoria acusa, desde a sua origem, aquela estrutura atomística do universo que, nas concepções actuais, assume uma importância fundamental: o quantum de acção. A conjectura mais simples e mais natural que se pode fazer para $\mathfrak{W}$ exprime-se do modo seguinte

$$(14) \qquad \mathfrak{W} = R^i_{jkl} R_i^{jkl} = |R|^2.$$

E também, em virtude de (13),

$$\mathfrak{W} = |P|^2 + 4L$$

(o que aqui se poderá pôr em dúvida será, quando muito, o factor 4 com que o segundo termo L [eléctrico] se adiciona ao primeiro). Mas, sem entrar ainda em pormenores sobre a forma da grandeza acção, poderemos extrair do princípio da acção algumas conclusões gerais. Vamos, nomeadamente, mostrar o seguinte: *do mesmo modo que*, segundo resultados de Hilbert, Lorentz, Einstein, Klein e o Autor *, *os quatro princípios de conservação da matéria* (do tensor energia-impulsão) *estão ligados à invariância da acção em relação às transformações de coordenadas* — invariância que faz intervir quatro funções arbitrárias — *assim também o princípio da con-*

* Hilbert, Die Grundlagen der Physik, 1. Mitt., g Gött. Nachr., 20. Nov. 1915; H. A. Lorentz em quatro artigos nas Versl. K. Ak. van Wetensch. Amsterdam 1915-16; A. Einstein, Berl. Ber. 1916, págs. 1111-1116; F. Klein, Gött. Nachr., 25. Jan. 1918; H. Weyl, Ann. d. Physik. 54 (1917), págs. 121-125.

servação da electricidade está associado a uma invariância que a nossa teoria introduz pela primeira vez : a invariância em relação à unidade de medida [20]) («Maßstab-Invarianz» [passagem de (8) para (9)] — invariância esta que faz intervir uma quinta função arbitrária. A forma como, deste modo, o princípio da conservação da electricidade fica associado ao princípio da energia-impulsão constitui, a meu ver, um dos mais fortes argumentos gerais que se podem aduzir em favor da teoria aqui exposta — se vier a pôr-se a questão da sua confirmação num domínio puramente especulativo.

Para uma variação arbitrária, desvanescente sobre a fronteira do domínio de universo que se considera, ponhamos

$$(15) \qquad \delta \int \mathfrak{W}\, dx = \int (\mathfrak{W}^{ik}\, \delta g_{ik} + \mathfrak{w}^{i}\, \delta \varphi_{i})\, dx \qquad (\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik})$$

As leis da Natureza terão então a seguinte expressão

$$(16) \qquad \mathfrak{W}^{ik} = 0, \qquad \mathfrak{w}^{i} = 0.$$

Podemos referir-nos às primeiras como sendo as leis do campo gravítico e às segundas como sendo as do campo electromagnético. As grandezas W_k^i e w^i introduzidas por

$$\mathfrak{W}_k^i = \sqrt{g}\, W_k^i, \quad \mathfrak{w}^i = \sqrt{g}\, w^i$$

são, respectivamente, as componentes mistas de um tensor de grau 2, e contravariantes de um tensor de grau 1, sendo o peso igual a — 2. No sistema de equações (16) há 5 equações que, atendendo às propriedades de invariância, são supérfluas. Isto exprime-se nas 5 seguintes identidades invariantes existentes entre os seus primeiros membros:

$$(17) \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} \equiv \mathfrak{W}_i^i\,;$$

$$(18) \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}_k^i}{\partial x_i} - \Gamma_{kr}^{s}\, \mathfrak{W}_s^r \equiv \frac{1}{2} F_{ik}\, \mathfrak{w}^i.$$

A primeira resulta da invariância de medida. Com efeito, se na passagem de (8) para (9) tomarmos para lg λ uma função de posição infinitamente pequena $\delta\rho$, obteremos a variação

$$\delta g_{ik} = g_{ik}\,\delta\rho, \quad \delta\varphi_i = \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x_i}.$$

Para ela (15) deve desvanecer-se. Se, em segundo lugar, utilizarmos a invariância da grandeza acção em relação a transformações de coordenadas obtidas por uma deformação infinitamente pequena do contínuo universal, obteremos as identidades.*

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_k^i}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k}\mathfrak{W}^{rs}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}\cdot\varphi_k - F_{ik}\mathfrak{w}^i\right) \equiv 0,$$

que se convertem em (18) se, de acordo com (17), se substituir $\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}$ por $g_{rs}\mathfrak{W}^{rs}$. Assim, só com as leis da gravitação tem-se já

$$(19) \qquad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = 0$$

e só com as leis do campo electromagnético devemos ter

$$(20) \qquad \frac{\partial \mathfrak{W}_k^i}{\partial x_i} - \Gamma_{kr}^s \mathfrak{W}_s^r = 0.$$

Na teoria de Maxwell, $\mathfrak{w}^i$ tem a forma

$$\mathfrak{w}^i \equiv \frac{\partial(\sqrt{g}\,F^{ik})}{\partial x_k} - \mathfrak{s}^i \qquad (\mathfrak{s}^i = \sqrt{g}\cdot s^i),$$

onde s^i designa a quadricorrente. Como aqui a primeira parte

* Weyl, Ann. d. Physik 54 (1917), págs. 121-125; F. Klein, Gött. Nachr., Sitzung v. 25 Jan. 1918.

satisfaz idênticamente a equação (19), esta fornece o princípio da conservação da electricidade

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\cdot s^i)}{\partial x_i}=0.$$

De igual modo, na teoria da gravitação de Einstein $\mathfrak{W}_k^i$ é formada de dois termos, dos quais o primeiro verifica idênticamente a equação (20), e o segundo é igual às componentes mistas T_k^i do tensor energia-impulsão, multiplicadas por $\sqrt{g}$. Assim, as equações (20) levam-nos aos quatro princípios de conservação da matéria. Circunstâncias inteiramente análogas se apresentam na nossa teoria, se adoptarmos para a grandeza acção a expressão (14), atrás apresentada como conjectura. Os cinco princípios de conservação são «eliminantes» das leis de campo, isto é, derivam delas por duas maneiras, pondo assim em evidência que cinco dessas leis são supérfluas.

Por exemplo, as equações de Maxwell escrevem-se da seguinte maneira, para o caso de se adoptar (14):

$$(21)\qquad \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,F^{ik})}{\partial x_k}=s^i, \qquad \text{e a corrente é}$$

$$s_i=\frac{1}{4}\left(R\varphi_i+\frac{\partial R}{\partial x_i}\right).$$

R designa o invariante de peso -1 que se forma com os R^i_{jkl} por contracção efectuada primeiro sobre os índices i, k e depois sobre j e l. O cálculo dá, designando por $R_\bullet$ o invariante de curvatura de Riemann, formado sòmente com os g_{ik}:

$$R=R_\bullet-\frac{3}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i}+\frac{3}{2}(\varphi_i\varphi^i).$$

No caso estático, em que as componentes espaciais do potencial electromagnético desaparecem e todas as grandezas são independentes do tempo x_0, devemos ter, segundo (21)

$$R = R_\bullet + \tfrac{3}{2}\,\varphi_0\,\varphi^0 = \text{const.}$$

Mas, numa região do universo em que seja $R \neq 0$, pode-se, também, com toda a generalidade, tomar $R =$ $=$ const. $= \pm 1$, bastando para isso fazer uma escolha adequada da unidade de comprimento, que é arbitrária. Só no caso de condições variáveis com o tempo é que serão de prever superfícies $R = 0$, as quais hão-de representar, claro está, determinada singularidade. R não pode ser tomado como densidade de acção (é como tal que $R_\bullet$ intervém na teoria da gravitação de Einstein), porque não possui o peso -2. Isto tem como consequência que a nossa teoria, que conduz perfeitamente à teoria electromagnética de Maxwell, não conduz do mesmo modo às equações da gravitação de Einstein: em vez destas, aparecem equações diferenciais de quarta ordem. Mas o que é verdade, também, é que é muito improvável que as equações da gravitação de Einstein sejam estritamente correctas: já que mais não seja, porque a constante de gravitação que nelas intervém cai inteiramente fora do quadro de dimensões das outras constantes da natureza, a tal ponto que, por exemplo, os raios de gravitação da carga e da massa de um electrão são de uma ordem de grandeza completamente diferente da do próprio raio do electrão (respectivamente 10^{20} e 10^{40} vezes mais pequenos *.

A minha intenção aqui foi apenas a de desenvolver, resumidamente, os princípios gerais da teoria. Levanta-se

---

* Cf. Weyl, «Zur Gravitationstheorie», Ann. d. Physik 54 (1917), pág. 133. *Cf. também Weyl, «Space-Time-Matter», Dover Publications, «First American Printing of the Fourth Edition (1922), pág. 261* (N. T.).

naturalmente o problema de extrair dela, sobre a base da conjectura especial formulada em (14), as suas consequências físicas *, e de pôr essas consequências em confronto com a experiência, investigando, em particular, se se pode deduzir dela a existência do electrão e as particularidades até agora inexplicadas dos processos atómicos **. Do ponto de vista matemático o problema é extremamente complexo, porque está vedada a possibilidade de se obterem soluções aproximadas, por abandono de termos não lineares: com efeito, no interior do electrão não é por certo legítimo desprezar tais termos e, por isso, as equações lineares obtidas com tal desprezo só admitem, em princípio, a solução 0. Proponho-me voltar a tratar de todas estas questões, com mais pormenor, noutro local.

---

* [O problema de determinar todos os invariantes W admissíveis como grandezas acção foi resolvido por R. Weitzenböck com a condição de que esses invariantes contenham as derivadas dos g_{ik} sòmente até à ordem 2, e as derivadas dos φ_i sòmente até à ordem 1 (Sitzungsber d. Akad. Wissesnch. in Wien, Abt. IIa, 129 (1920), sessões de 21 e 28 de Outubro; 130 (1921, 10 Fev.). Se se puserem de parte aqueles invariantes W para os quais a variação $\delta \int W d\omega$ se desvanece idênticamente, restarão apenas 3 possibilidades, segundo um cálculo mais desenvolvido de R. Bach (Math. Zeitschrift 9 (1921), págs. 125 e 189). O W real parece ser uma combinação linear do L de Maxwell e do quadrado de R. Esta conjectura foi explorada com mais rigor por W. Pauli (Physik Zeitschr. 20 (1919), págs. 457-467) e por mim; conseguimos avançar, sobre esta base, até ao ponto de chegarmos a deduzir as equações do movimento de uma partícula material. Pelo contrário, o invariante (14), a que nos aventurámos a dar, no presente trabalho, um lugar de privilégio, não parece que desempenhe na natureza qualquer papel. Cf. Raum, Zeit, Materie, 5.ª ed. §§ 38, 40.]

** [Ulteriormente pus completamente de parte estas esperanças, despertadas pela teoria de Mie: creio que o problema da matéria não pode ser resolvido por uma pura teoria de campo. Cf. sobre isto o meu artigo «Feld und Materie», Ann. d. Physik 65 (1921), págs. 541-563.]

Notas do Tradutor

1) O autor chama índice de inércia de uma forma quadrática ao número de termos negativos que aparecem na expressão $\varepsilon_i x_i^2$ dessa forma (ver «Space, time, matter», Weyl, Dover Public., Trad. da 4.ª Ed., 1.ª edição americana, pág. 30).

2) Seguindo a terminologia usual entre nós, traduziu-se aqui por «aplicação sobre...» a expressão alemã «Abbildung auf...».

3) No texto alemão: «Diese Abbildung ist... *ähnlich*».

4) Na terminologia alemã, entende-se em geometria elementar por figuras congruentes figuras sobreponíveis.

5) Considera-se aqui a premissa 1. dividida em duas partes: a primeira afirma que o d. paralelo conduz a uma aplicação afim; a segunda que essa aplicação afim é uma aplicação de semelhança.

6) Tal como acontece com os g_{ik} da forma quadrática (2).

7) Visto que a substituição de g_{ik} por λg_{ik} arrasta a substituição de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ por $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 lg\lambda}{\partial x_i \partial x_k}$ e por outro lado $\frac{\partial^2 lg\lambda}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 lg\lambda}{\partial x_k \partial x_i}$.

8) Visto que $F_{ik}\, dx_i\, \delta x_k = \frac{1}{2}(F_{ik}\, dx_i\, \delta x_k + F_{ki}\, dx_k\, \delta x_i) = \frac{1}{2}(F_{ik} dx_i \delta x_k - F_{ik} dx_k\, \delta x_i)$.

9) Analogia com a área do paralelogramo elementar do espaço tridimensional, cujas projecções sobre os planos de coordenadas $x_\alpha\, x_\beta$ são respectivamente $dx_\alpha\, dx'_\beta - dx_\beta\, dx'_\alpha$. (Cf. Landau, Th du Champ, Ed. de la Paix, pág. 30.)

10) Porque então $d\varphi = 0$, e, portanto, $dl = l d\varphi = 0$.

11) Com efeito, sendo $\varphi_r = 0$, a equação $\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} - g_{ik}\, \varphi_r$ pode escrever-se na forma $g_{\rho i}\, \Gamma^\rho_{kr} + g_{\rho k}\, \Gamma^\rho_{ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}$. Por permutação dos índices i, k, r, podem obter-se desta duas outras equações. Somando-as e subtraindo à soma a primeira, chega-se à conclusão do texto. (Cf. Appell, Mec. Rat., Vol. V, pág. 157 da 2.ª ed.)

12) A anterior condição $\varphi_i = 0$ é apenas suficiente, e não é invariante, visto estar ligada à fixação de valores absolutos para os g_{ik}.

13) A condição de semelhança $dl = l d\varphi$ dá, por integração entre os pontos P e P', $\left[\log l\right]_P^{P'} = \int_P^{P'} d\varphi$. Este integral só é independente do

caminho seguido se $d\varphi$ for uma diferencial total, isto é, se $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$.

(Cf. Pauli, Relativitätstheorie, ed. 1963, pág. 237.)

14) Como se vê substituindo em (4) ξ^i por $\frac{dx^i}{d\tau}$.

15) P_{ijkl} e não P^i_{jkl}, visto que o conceito de simetria, ou anti-simetria, só é aplicável a índices congéneres (ambos de covariância, ou ambos de contravariância).

16) E não $\frac{1}{n}\ R^i_i$, como está no texto alemão.

17) Visto que $F_{ik} = g_{i\rho}\, g_{\sigma k}\ F^{\rho\sigma}$, o peso de F_{ik} é 0, e o dos $g_{\alpha\beta}$ é 1.

18) Sobre a dedução das equações de Mawxell a partir de um princípio de acção estacionária, ver, por exemplo, M. A. Tonnelat, «Les Principes de la Théorie Electromagnétique et de la Rélativité», Ed. Masson, 1959, pág. 217.

19) Visto que sendo então o determinante g de ordem n, o peso de g será n, e o de $\sqrt{g}$ será $n/2$.

20) Chamada também invariânciá de calibração («Eichinvarianz» em Pauli).

ÍNDICE

ÍNDICE

Esta 6.ª edição da tradução portuguesa
de
O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE
de
H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski,
foi impressa em offset
nas oficinas da G. C. – Gráfica de Coimbra, Lda.
para a Fundação Calouste Gulbenkian
A tiragem é de 750 exemplares encadernados
Mês de Maio de 2014

Depósito Legal n.º 375060/14

ISBN 978-972-31-0723-4

EDIÇÕES DA FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Textos Clássicos

Próxima publicação:

Princípios de Política Económica
Walter Eucken

Manuais Universitários

Próxima publicação:

Teoria Geral do Estado, 4.ª Edição Atualizada
Reinhold Zippelius

Cultura Portuguesa

Próxima publicação:

Escritores Portugueses e Leitores Ingleses
Thomas Earl

Capa de Sebastião Rodrigues

EDIÇÕES
DA FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

TEXTOS CLÁSSICOS – As raízes da cultura estão naquelas obras chamadas clássicas, obras cuja mensagem se não esgotou e que permanecem fontes vivas do progresso humano. Por isso a Fundação, ao esquematizar o seu Plano de Edições, julgou que seria indispensável colocar ao alcance do público lusófono livros que marcassem momentos decisivos na história dos vários sectores da civilização. Da ciência pura à tecnologia, da quantidade abstracta ao humanismo concreto, procurar-se-á que os depoimentos mais representativos figurem nesta nova série editorial. Para dificultar ao mínimo o acesso do leitor, todas as obras serão vertidas em português e apresentadas com a dignidade e a segurança que naturalmente lhes são devidas. Integrando na língua pátria estes grandes nomes estrangeiros, supomos contribuir para uma mais perfeita consciência da própria cultura nacional cujos clássicos terão também o lugar que lhes compete no Plano de Edições da Fundação Calouste Gulbenkian. ■ *ALBERT EINSTEIN* (1879-1955). Um dos maiores físicos teóricos de todos os tempos. Criador das Teorias da Relatividade, restrita e geral. Prémio Nobel em 1921. ■ *HENDRIK LORENTZ* (1853-1928). Um dos precursores da teoria da Relatividade. Demonstrou a invariância das equações de Maxwell para a transformação que recebeu o seu nome. Previu teoricamente o efeito Zeeman. Recebeu, com este, o prémio Nobel em 1902. ■ *HERMANN MINKOWSKI* (1864-1909). Trabalhos notáveis sobre as formas quadráticas e a teoria dos números. Introduziu o conceito de espaço-tempo como um contínuo quadridimensional, sendo espaço e tempo indissociáveis. ■ *Manuel dos Reis* (1900). Doutorou-se (1929) em Matemática pela Faculdade de Ciências da Univ. de Coimbra. Professor catedrático (1933-1970) e director do Observatório Astronómico (1934-1970). Sócio efectivo (1959) da Academia das Ciências de Lisboa. Tem publicado trabalhos de investigação científica e histórica sobre Matemática pura e aplicada. ■ *Mário José Saraiva* (1914). Curso de Engenharia Militar e respectivo diploma de engenheiro civil pela antiga Escola do Exército (1939). Professor efectivo do Colégio Militar.